Лекция 27. Дифференциальные формы и когомологии

> Хотя ряд понятий топологии $\langle\ldots\rangle$ и вводится без особого труда, попытки их серьезно использовать в простейших примерах неизбежно требуют развития некоторого аппарата, не представленного никакими аналогиями в классической математике.
>
> *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.*

Начнем с невинного определения.

Определение 27.1. Пусть ω — дифференциальная форма на многообразии. Говорят, что ω *замкнута,* если $d\omega = 0$, и *точна,* если существует такая форма η, что $\omega = d\eta$.

Из предложения 24.17 следует, что всякая замкнутая форма является точной. Стало быть, имеет смысл следующее определение:

Определение 27.2. Пусть X — гладкое многообразие. *k-ой группой когомологий Де Рама* многообразия X называется фактор пространства замкнутых k-форм по пространству точных k-форм[1]. Обозначение: $H^i_{\mathrm{DR}}(X)$.

Обратный образ замкнутой формы при гладком отображении будет замкнут (если $d\omega = 0$, то $d(f^*\omega) = f^*d\omega = 0$), а обратный образ точной формы будет точен. Поэтому всякое гладкое отображение $f\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм групп (векторных пространств) когомологий Де Рама $f^*\colon H^i_{\mathrm{DR}}(Y) \to H^i_{\mathrm{DR}}(X)$, направленный «против течения» (для простоты этот гомоморфизм обозначается так же, как обратный образ дифференциальной формы). Ясно, что $(f\circ g)^* = g^*\circ f^*$ (то же соотношение, что для обратных образов форм). Понятно, что диффеоморфные многообразия имеют изоморфные когомологии Де Рама[2].

Познакомимся с когомологиями Де Рама поближе. По самому́ определению, $H^k_{\mathrm{DR}}(X) = 0$, если k отрицательно или больше $\dim X$. Найдем $H^0_{\mathrm{DR}}(X)$. Точных форм степени ноль вообще нет (так как нет форм степени -1), а замкнутые формы степени ноль — это функции с нулевым дифференциалом. Поскольку в локальных координатах у такой функции все частные производные равны нулю, получаем, что пространство замкнутых 0-форм на X (оно же $H^0_{\mathrm{DR}}(X)$) есть пространство функций, постоянных на компонентах связности многообразия X. В частности, если X связно, то $H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$.

Итак, с H^0_{DR} все просто и неинтересно. Попробуем посчитать что-нибудь еще.

---

[1] Разумеется, это не группа, а векторное пространство над $\mathbb{R}$, но так уж говорят.

[2] Слово «диффеоморфные» можно здесь заменить на «гомеоморфные», но доказать это в нашем курсе мы не сможем. Гомеоморфные, но не диффеоморфные гладкие многообразия действительно существуют, но построить соответствующие примеры не просто.

Предложение 27.3. *Если* $X = \mathbb{R}$, *то* $H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$, $H^1_{\mathrm{DR}}(X) = 0$.

Доказательство. Только утверждение про H^1_{DR} нуждается в доказательстве. По соображениям размерности всякая 1-форма на прямой замкнута; с другой стороны, всякая 1-форма на прямой будет и точна: если $\omega = f(x)dx$, то $\omega = dF$, где F — любая первообразная функции f. $\square$

Пример окружности менее скучен.

Предложение 27.4. $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1) = \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, действующее по правилу $\varphi \mapsto (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Легко видеть, что отображение $\omega \mapsto p^*\omega$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространствами 1-форм на S^1 и форм на прямой вида $f(x)dx$, где функция f периодична с периодом 2π; такая форма соответствует точной форме на окружности тогда и только тогда, когда имеет вид $F'(x)dx$, где функция F также имеет период 2π. Стало быть, $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1)$ изоморфно Z/B, где Z — пространство 2π-периодических функций на прямой, а B — пространство тех функций, первообразная которых также имеет период 2π. Поскольку первообразная периодической функции f периодична тогда и только тогда, когда интеграл от f по периоду равен нулю, линейное отображение $Z \to \mathbb{R}$, заданное формулой $Z \mapsto \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, имеет своим ядром пространство B, и $Z/B \cong \mathbb{R}$, что и требовалось. $\square$

В следующей лемме метод доказательства, пожалуй, важнее самого утверждения.

Лемма 27.5. *Для всякого гладкого многообразия* X *имеем* $H^i_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R}) \cong H^i_{\mathrm{DR}}(X)$ *для всех* i.

Доказательство. Рассмотрим отображение проекции $p\colon X\times\mathbb{R} \to X$, переводящее пару (x,t) в x. Мы покажем, что гомоморфизм $p^*\colon H^m_{\mathrm{DR}}(X) \to H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R})$ является изоморфизмом. Чтобы это сделать, построим в явном виде обратный изоморфизм. Именно, рассмотрим отображение вложения $i\colon X \to X\times\mathbb{R}$, действующее по правилу $x \mapsto (x,0)$ и покажем, что для всякого m отображение $i^*\colon H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R}) \to H^m_{\mathrm{DR}}(X)$ обратно к отображению p^*. Иными словами, мы проверим, что отображения $i^*\circ p^*\colon H^m_{\mathrm{DR}}(X) \to H^m_{\mathrm{DR}}(X)$ и $p^*\circ i^*\colon H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R}) \to H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R})$ являются тождественными.

С первым из этих отображений все просто: поскольку $p\circ i$ — тождественное отображение многообразия X, отображение $i^*\circ p^*$ является тождественным отображением на $\Omega^m(X)$ и тем более на $H^m_{\mathrm{DR}}(X)$. А вот с $p^*\circ i^*\colon H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R}) \to H^m_{\mathrm{DR}}(X\times\mathbb{R})$ придется повозиться. Именно, мы построим так называемую «цепную гомотопию»: набор гомоморфизмов $s^j\colon \Omega^j(X\times\mathbb{R}) \to \Omega^{j-1}(X\times\mathbb{R})$, удовлетворяющих такому соотношению:

$$d^{j-1}s^j\omega + s^{j+1}d^j\omega = \omega - p^*i^*\omega \qquad \text{для всех } \omega \in \Omega^j(X\times\mathbb{R}). \tag{27.1}$$

(здесь и далее мы считаем, что $\Omega^j(Y) = 0$, если j отрицательно или превосходит $\dim Y$). Если гомоморфизмы s_j построены, то для всякой замкнутой формы $\omega \in \Omega^m(X \times \mathbb{R})$ имеем

$$\omega - p^* i^* \omega = d^{m-1} s^m \omega + s^{m+1} d^m \omega = d^{m-1}(s^m \omega).$$

Стало быть, ω отличается от $p^* i^* \omega$ на точную форму; значит, две эти дифференциальные формы определяют один и тот же класс когомологий в $H^m_{\mathrm{DR}}(X \times \mathbb{R})$, и на когомологиях отображение $p^* \circ i^*$ является тождественным, как и утверждалось.

Остается построить искомую гомотопию (отображения s^j). Для этого возьмем какое-нибудь покрытие многообразия X координатными окрестностями U_α; тогда $X \times \mathbb{R}$ можно покрыть координатными окрестностями $U_\alpha \times \mathbb{R}$; положим $\dim X = n$ и будем обозначать локальные координаты на X через $(x_1, \ldots, x_n)$, а локальные координаты в $X \times \mathbb{R}$ — через $(x_1, \ldots, x_n, t)$. Теперь определим отображение $s^m \colon \Omega^m(X \times \mathbb{R}) \to \Omega^{m-1}(X \times \mathbb{R})$ следующим образом. Если $\omega = f(t, x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$ (без участия dt), то положим $s^m \omega = 0$; если же $\omega = f(t, x_1, \ldots, x_n) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{m-1}}$, то положим

$$s^m \omega = \Big(\int_0^t f(u, x_1, \ldots, x_n)\, du \Big) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{m-1}}.$$

При замене локальных координат, не затрагивающей t (именно так и будет при пользовании окрестностями $U_\alpha \times \mathbb{R}$), правые части наших выражений для $s^m \omega$ будут преобразовываться как дифференциальные формы (поскольку умножение на функцию, не зависящую от t, коммутирует с интегрированием по t). Поэтому наши гомоморфизмы s^m корректно определены.

Проверим выполнение тождества 27.1. Рассмотрим те же два случая, что и при определении s^m.

Случай 1. $\omega = f(t, x_1, \ldots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}$. В этом случае

$$\omega - p^* i^* \omega = (f(t, x_1, \ldots, x_n) - f(0, x_1, \ldots, x_n)) x_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m}. \qquad (27.2)$$

Так как $ds^m \omega = 0$ (поскольку $s^m \omega = 0$), надо только посчитать $s^{m+1} d\omega$. Имеем $d\omega = \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge x_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} + \ldots$, где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие dt и тем самым переходящие в нуль под действием s^{m+1}. Что же до первого слагаемого, то s^{m+1}, примененное к нему, даст, очевидно, правую часть (27.2).

Случай 2. $\omega = f(t, x_1, \ldots, x_n) dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{m-1}}$. В этом случае $i^* \omega = 0$, так что надо доказать, что $\omega = ds\omega + sd\omega$. Будем для краткости писать $\widetilde{g}$ вместо

$\int_0^t g(u, x_1, \dots, x_n)\, du$. Имеем:

$$
\begin{aligned}
s^m\omega &= \widetilde{f} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}};\\
ds^m\omega &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}};\\
d\omega &= -\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dt \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}};\\
s^{m+1}d\omega &= -\sum_{j=1}^{m} \widetilde{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)} x_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{m-1}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку, очевидно, $\widetilde{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_j}$ (проверьте сами, что дифференцирование под знаком интеграла законно) и $\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t} = f$, в сумме $ds\omega + sd\omega$ сократятся все слагаеме, кроме одного, равного ω. Доказательство закончено. $\square$

Из доказанной леммы индукцией по n вытекает

Следствие 27.6. *$H^0_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}^n) = 0$ при $i > 0$.*

Как известно, открытый шар в $\mathbb{R}^n$ диффеоморфен $\mathbb{R}^n$ (с помощью ортогональной проекции установим диффеоморфизм шара в $\mathbb{R}^n$ с «южным полушарием» сферы в $\mathbb{R}^{n+1}$, а затем с помощью проекции из центра на плоскость, касающуюся «южного полюса», установим диффеоморфизм этой полусферы и $\mathbb{R}^n$). С другой стороны, каждая точка на n-мерном гладком многообразии (без края) обладает окрестностью, диффеоморфной шару в $\mathbb{R}^n$. Поэтому из следствия 27.6 вытекает такое предложение:

Предложение 27.7 (лемма Пуанкаре). *Пусть ω — дифференциальная форма положительной степени на многообразии X. Если ω замкнута, то для всякой точки $x \in X$ найдутся такие окрестность $U \ni X$ и дифференциальная форма η на U, что $\omega|_U = d\eta$.*

Иными словами, всякая замкнутая форма локально точна. Тем самым когомологии Де Рама, измеряющие, насколько замкнутые формы отличаются от точных, несут в себе информацию о том, каким образом многообразие склеено из простейших кусков — окрестностей, диффеоморфных шарам.

К сожалению, для того, чтобы дать достаточное количество примеров вычисления когомологий, у нас не хватит техники. Поэтому почти все дальнейшие утверждения в этой лекции будут даны без доказательств.

Предложение 27.8. *Если X — компактное ориентируемое многообразие без края) размерности n, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X, \mathbb{R}) \neq 0$.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь ориентацию многообразия X. В ходе доказательства предложения 26.11 была построена дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n(X)$, обладающая тем свойством, что $\omega_x(v_1, \ldots, \omega_n) > 0$ для всякой точки $x \in X$ и для всякого положительно ориентированного базиса $(v_1, \ldots, v_n)$ в $\mathcal{T}_x X$. Стало быть, в любых сохраняющих ориентацию локальных координатах форма ω записывается в виде $f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge x_n$, где функция f всюду положительна. Поэтому из определения интеграла формы по ориентированному многообразию ясно, что $\int_X \omega$ является суммой положительных чисел; в частности, $\int_X \omega \neq 0$. Следствие из теоремы Стокса (следствие 26.22) показывает, что форма ω не является точной; с другой стороны, она замкнута по соображениям размерности. Следовательно, ω представляет ненулевой n-мерный класс когомологий. □

На самом деле верно более точное утверждение, которое мы уже не докажем:

Предложение 27.9. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие. Если X ориентируемо, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = \mathbb{R}$, а если X неориентируемо, то $H^n_{\mathrm{DR}}(X) = 0$.*

Предложение 27.4 обобщается на сферы произвольных размерностей таким образом:

Предложение 27.10. *Пусть S^n — n-мерная сфера. Тогда $H^0_{\mathrm{DR}}(S^n) = \mathbb{R}$, $H^n_{\mathrm{DR}}(S^n) = \mathbb{R}$, и $H^i_{\mathrm{DR}}(S^n) = 0$ при $i \neq 0, n$.*

Расскажем в заключение о связи когомологий Де Рама с сингулярными цепями. Пусть ω — дифференциальная форма степени k на многообразии X. Тогда ее можно рассматривать как функцию на множестве всех k-мерных (гладких) сингулярных симплексов, действующую по правилу $\sigma \mapsto \int_\sigma \omega$. (Более того, можно показать, что k-форма полностью определяется своими интегралами по k-мерным сингулярным симплексам, так что при такой интерпретации k-форм никакая информация не теряется.) Ясно, что при этом какая попало функция получиться не может: интеграл данной формы по симплексу должен «непрерывно» зависеть от симплекса (при любом разумном определнии понятия непрерывности). Отбросим теперь всякие ограничения на зависимость «интеграла» от симплекса:

Определение 27.11. Пусть X — k-мерное многообразие. *k-мерной коцепью на многообразии X с коэффициентами в* $\mathbb{R}$ называется отображение c из множества k-мерных сингулярных симплексов в $\mathbb{R}$. Множество k-мерных коцепей обозначается $C^k(X)$; оно является векторным пространством над $\mathbb{R}$ (если c_1 и c_2 — коцепи, то $(c_1 + c_2)(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma)$; аналогично с умножением на число).

Коцепь, ставящую в соответствие симплексу σ число $\int_\omega \sigma$, где ω — фиксированная k-форма, будем обозначать c_ω.

Итак, коцепи — это обобщение дифференциальных форм; следующая конструкция является обобщением внешнего дифференциала.

Определение 27.12. Пусть $c \in C^k(X)$. *Кограницей* коцепи c называется $(k+1)$-мерная коцепь dc, действующая по правилу

$$(dc)(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} c(\partial_i \sigma).$$

При соответствии $\omega \mapsto c_\omega$ внешний дифференциал переходит в когранницу:

Предложение 27.13. *Пусть $\omega \in \Omega^k(X)$. Тогда $d(c_\omega) = c_{d\omega}$ (в левой части d означает кограницу, в правой — внешний дифференциал).*

Доказательство. Это переформулировка первого варианта теоремы Стокса (теорема 25.16). □

Можно рассматривать коцепи как функции на сингулярных цепях, если для коцепи c положить $c(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i c(\sigma_i)$. В таких обозначениях определение кограницы записать совсем просто: $(dc)(\sigma) = c(\partial\sigma)$.

Предложение 27.14. *Пусть c — сингулярная коцепь. Тогда $d(dc) = 0$.*

Доказательство. Это прямое следствие предложения 25.15: $ddc(\sigma) = (dc)(\partial\sigma) = c(\partial\partial\sigma) = 0$. □

Следующее определение полностью параллельно определению 27.2.

Определение 27.15. Пусть X — гладкое многообразие. k-мерная коцепь c, для которой $dc = 0$, называется *k-мерным коциклом.* k-мерная коцепь c, являющаяся кограницей $k-1$-мерной коцепи, называется *k-мерной кограницей. k-ой группой (сингулярных) когомологий многообразия X с коэффициентами в* $\mathbb{R}$ называется фактор пространства k-коциклов по подпространству k-кограниц (предложение 27.14 показывает, что всякая кограница является коциклом). Обозначение: $H^k(X, \mathbb{R})$.

Предложение 27.13 показывает, что при отображении $\omega \mapsto c_\omega$ замкнутые формы переходят в коциклы, а точные формы — в кограницы. Следовательно, отображение $\omega \mapsto c_\omega$ индуцирует естественный гомоморфизм $H^k_{\mathrm{DR}}(X) \to H^k(X, \mathbb{R})$.

Теорема 27.16 (теорема Де Рама). *Гомоморфизм $H^k_{\mathrm{DR}}(X) \to H^k(X, \mathbb{R})$, индуцированный отображением $\omega \mapsto c_\omega$, является изоморфизмом.*

Доказать теорему Де Рама мы не сможем. Вместо этого обсудим определения, которые мы только что ввели.

Во-первых, в определениях 27.11, 27.12 и 27.15 можно всюду заменить гладкие сингулярные симплексы на непрерывные. Для многообразий полученные группы когомологий будут естественно изморфны группам когомологий, введенным в определении 27.15; преимущество нового определения в том, что оно применимо к топологическим пространствам, не являющимся гладкими многообразиями. Во-вторых, в определении 27.11 не обязательно рассматривать коцепи как функции со значениями в $\mathbb{R}$. С тем же успехом можно рассматривать функции на множестве сингулярных симплексов со значениями в произвольной абелевой группе G. При этом получатся так называемые *группы сингулярных когомологий с коэффициентами в* G (обозначаются $H^k(X, G)$).

Определение 27.2, и тем более 27.15, выглядит очень абстрактным и непригодным для работы. На самом деле когомологии — объект очень даже вычислимый, но чтобы узнать, как именно такие вычисления проводятся, вам придется подождать курса топологии.