Этот не отдельная лекция, а некоторые дополнения к лекции 23. Мы расскажем еще о двух конструкциях, связанных с векторными полями и фазовыми потоками.

Выпрямление векторного поля

Обсудим, как может быть устроено векторное поле локально (с точностью до диффеоморфизма). Сначала дадим точные определения.

Обозначение 23.11. Пусть $f\colon X \to Y$ — диффеоморфизм гладких многообразий и v — векторное поле на X. Тогда через f_*v обозначается векторное поле на Y, определенное следующим образом:

$$(f_*v)_y = f_*(v_{f^{-1}(y)})$$

(напомним еще раз, что через f_* обозначается производная отображения f).

Заметим, кстати, что f_*v не удается определить, если отображение f не взаимно однозначно (так как в этом случае не будет однозначно определена точка $f^{-1}(y)$).

Теперь нашу задачу локальной классификации векторных полей можно уточнить. Именно, пусть v — векторное поле на n-мерном многообразии X и $x \in X$. Требуется найти окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $f\colon U \to V$, где V — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ таким образом, чтобы векторное поле $f_*(v|_U)$ имело максимально простой вид.

Если $v_x = 0$ (в таких случаях часто говорят, что x — *особая точка* векторного поля v), то никакого разумного решения у этой задачи нет, да и сама ее постановка малоосмысленна: особые точки векторных полей слишком разнообразны, чтобы можно было надеяться их расклассифицировать. А вот если $v_x \neq 0$, то, напротив, все очень хорошо:

Предложение 23.12 (Теорема о выпрямлении). *Пусть v — векторное поле на n-мерном многообразии X и $x \in X$. Если $v_x \neq 0$, то существуют такие окрестность $U \ni x$ и диффеоморфизм $f\colon U \to V$, где V –открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, что $f_*(v|_U) = \partial/\partial x_1$.*

Доказательство. Так как задача локальна, можно сразу считать, что X — область в $\mathbb{R}^n$. Выберем координаты в $\mathbb{R}^n$ таким образом, что $x = (0, \ldots, 0)$ и вектор v_x не лежит в гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$, заданной уравнением $x_1 = 0$. Пусть $\{g_t\}$ — определенный в окрестности точки x локальный фазовый поток, соответствующий полю v. Тогда для некоторой окрестности $U' \subset U$, содержащей x, и некоторого $\varepsilon > 0$, корректно определено отображение $g\colon (U'\cap H)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$, действующее по формуле $(z,t)\mapsto g_t(z)$. Поскольку $g(z,0)=z$, и к тому же в точке $(0,\ldots,0)$ имеем $g_*(\partial/\partial t)=v_x$, производная g в точке $(0,\ldots,0)$ обратима, так что в окрестности этой точки g является диффеоморфизмом. С другой стороны, по самому определению фазовой кривой имеем $g_*(\partial/\partial t)=v$ (в некоторой окрестности начала координат). Остается положить $f=g^{-1}$. $\square$

Поля прямых

Определение 23.13. Будем говорить, что на многообразии X задано *поле прямых,* если для каждой точки $x\in X$ выбрана прямая (одномерное векторное подпространство) $\ell_x\subset \mathcal{T}_xX$, причем ℓ_x гладко зависит от x.

Определение 23.14. Будем говорить, что гладкая кривая $C\subset X$ является *интегральной кривой* поля прямых $\{\ell_x\}$, если для всякой $x\in C$ кривая C касается прямой ℓ_x в точке x (то есть $\mathcal{T}_xC=\ell_x\subset\mathcal{T}_xX$).

Уточнение: под гладкой кривой на X понимается гладкое одномерное замкнутое подмногообразие некоторого открытого подмножества $U\subset X$.

Основное свойство полей прямых заключается в том, что интегральные кривые всегда существуют и единственны. Точнее говоря:

Предложение 23.15. *Пусть на многообразии X задано поле прямых. Тогда для всякой точки $x\in X$ существует пара (C,U), где $U\subset X$ — открытое подмножество, $C\subset U$ — одномерное замкнутое подмногообразие, и C — интегральная кривая поля прямых, проходящая через x.*

Более того, если (C_1,U_1) и (C_2,U_2) — две такие пары, то $C_1\cap U_1\cap U_2=C_2\cap U_1\cap U_2$.

Замечание 23.16. Вторая часть предложения 23.15 (единственность) показывает, что локальные интегральные кривые состыковываются друг с дружкой в единое целое. Однако же это «единое целое» не обязательно будет замкнутым подмногообразием в X. Пример (небезызвестная «обмотка тора»): $X=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $v=\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}$, где число α иррационально. Если продолжать интегральную кривую неограниченно, она как подмножество в X будет образом прямой с уравнением $x_2=\alpha x_1+c$, и это множество будет всюду плотно в торе X.

Что можно гарантировать — это что при неограниченном продолжении интегральной кривой мы получим иммерсию $\mathbb{R}\to X$.

Доказательство. Чтобы формулы получились более привычными, обозначим размерность многообразия X через $n+1$. Ввиду локальности задачи мы можем (и будем) считать, что X — открытое подмножество в‘$\mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$ через $(t, x_1, \ldots, x_n)$ и выберем систему координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ таким образом, чтобы ни одна из прямых ℓ_y для y, близких к x, не была «вертикальна» — перпендикулярна оси t. Задать такую прямую, проходящую через точку $x = (t_0, x_1, \ldots, x_n)$ — все равно, что задать n чисел $v_1, \ldots, v_n$ с тем, чтобы прямая ℓ_x задавалась параметрическими уравнениями

$$t \mapsto (t_0 + t, x_1 + c_1 t, \ldots, x_n + c_n t).$$

Стало быть, поле прямых — это набор n гладких функций $v_1, \ldots, v_n$, зависящих от $t, x_1, \ldots, x_n$; гладкость зависимости ℓ_x от x означает, что функции‘$v_1, \ldots, v_n$ гладки. Ясно, что в таких обозначениях интегральные кривые суть графики отображений из (интервала в) $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^n$, заданных формулой $t \mapsto (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)); \\ \ldots & \\ \frac{dx_n}{dt} &= v_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{aligned} \tag{23.3}$$

В любом учебнике по дифференциальным уравнениям объясняется, что система (23.3) называется системой неавтномных дифференциальных уравнений и что такая система всегда имеет единственное решение; в том же учебнике будет написано, что система неавтономных дифференциальных уравнений сводится к системе автономных уравнений (с не зависящей от t правой частью) с помощью введения дополнительной переменной x_{n+1} и дополнительного уравнения $dx_{n+1}/dt = 1$); существование и единственность (и гладкая зависимость от начальных условий) решения этой последней равносильно существованию локального фазового потока (см. лекцию 23). □

Замечание 23.17. Неформально наше доказательство можно описать совсем просто: нарисуем на каждой из прямых ℓ_x по стрелочке — получится векторное поле; фазовые кривые этого векторного поля, рассматриваемые как подмножества в X, будут интегральными кривыми поля прямых. В нашем доказательстве мы формально проверили, что такую расстановку стрелок можно произвести «гладким» образом, а также убедились в единственности интегральной кривой.