## Дополнение к лекции 27: теорема Майера-Виеториса

В этом дополнении мы приведем один реалистический пример вычисления когомологий.

**Определение 27.17.** Последовательность векторных пространств (абелевых групп, модулей над данным кольцом и т. п.)

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

называется *точной в члене B,* если $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$; последовательность называется *точной,* если она точна в каждом члене.

Например, последовательность $0 \to A \xrightarrow{f} B$ точна в члене $A$ тогда и только тогда, когда $f$ — мономорфизм, а последовательность $A \xrightarrow{f} B \to 0$ точна в члене $B$ тогда и только тогда, когда $f$ — эпиморфизм. Другой пример: если последовательность

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

точна в членах $B$ и $C$ и гомоморфизм $f$ сюръективен, то гомоморфизм $h$ инъективен (доказательство: $f$ сюръективен, значит $\operatorname{Im} f = B$, значит $\operatorname{Ker} g = B$, значит $g = 0$, значит $\operatorname{Im} g = 0$, значит $\operatorname{Ker} h = 0$).

Следующее утверждение является одним из вариантов «теоремы Майера-Виеториса».

**Теорема 27.18.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие размерности $n$. Если $U$ и $V$ — подмногообразия (с краем) многообразия $X$, причем $X = \operatorname{Int} U \cup \operatorname{Int} V$, то имеет место точная последовательность*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{DR}}(X) \to H^0_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{DR}}(V) \to H^0_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to H^1_{\mathrm{DR}}(X) \to \\ H^1_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^1_{\mathrm{DR}}(V) \to H^1_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to H^2_{\mathrm{DR}}(X) \to \dots \\ \to H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to H^n_{\mathrm{DR}}(X) \to H^n_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^n_{\mathrm{DR}}(V) \to H^n_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \to 0. \end{aligned} \tag{27.3}$$

Видимо, доказательство теоремы Майера-Виеториса будет восприниматься легче, если предварительно ввести несколько начальных понятий гомологической алгебры.

**Определение 27.19.** *Комплексом векторных пространств* (абелевых групп, модулей над данным кольцом, и т. п.) называется занумерованная целыми числами последовательность векторных пространств (абелевых групп, модулей над данным кольцом, и т. п.) $K^i$ и гомоморфизмов $d^i \colon K^i \to K^{i+1}$, удовлетворяющих условию $d^{i+1} \circ d^i = 0$ для всех $i$.

Комплекс $\{K^i, d^i\}$ сокращенно обозначается $K^{\cdot}$.

Если $X$ — гладкое многообразие, то комплекс, в котором $K^i = \Omega^i(X)$ и $d^i$ — внешнее дифференцирование, называется *комплексом Де Рама* многообразия $X$ и обозначается $\Omega^{\cdot}(X)$ (напомним, что мы положили $\Omega^i(X) = 0$ при $i \notin [0; \dim X]$).

Другой типичный пример комплекса — комплекс $C^\cdot(X)$, где $C^i(X)$ — пространство $i$-мерных коцепей на многообразии $X$ (дифференциалы $d^i\colon C^i(X)\to C^{i+1}(X)$ определены в определении 27.12).

Из условия $d^i\circ d^{i-1}=0$ вытекает, что в комплексе $K^\cdot$ имеет место включение $\operatorname{Im} d^{i-1}\subseteq \operatorname{Ker} d^i$. Поэтому имеет смысл следующее определение:

**Определение 27.20.** Пусть $K^\cdot$ — комплекс. Тогда его *$i$-ой группой когомологий* называется фактор $\operatorname{Ker} d^i/\operatorname{Im} d^{i-1}$.

Например, $H^i_{\mathrm{DR}}(X)=H^i(\Omega^\cdot(X))$.

**Определение 27.21.** Пусть $K^\cdot$ и $L^\cdot$ — два комплекса. *Гомоморфизмом* $f\colon K^\cdot\to L^\cdot$ называется семейство гомоморфизмов $f^i\colon K^i\to L^i$, для которых все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K^{i+1} & \xrightarrow{f^{i+1}} & L^{i+1} \\ {\scriptstyle d^i}\big\uparrow & & {\scriptstyle d^i}\big\uparrow \\ K^i & \xrightarrow{f^i} & L^i \end{array}$$

коммутативны.

Иными словами, семейство $\{f^i\}$ является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда выполнены соотношения $f^{i+1}d^i=d^if^i$ (в более вольной записи: $df=fd$).

Если, например, $f\colon X\to Y$ — гладкое отображение, то обратный образ форм задает гомоморфизм комплексов $f^*\colon\Omega^\cdot(Y)\to\Omega^\cdot(X)$.

Если $f\colon K^\cdot\to L^\cdot$ — гомоморфизм комплексов, то, очевидно, $f(\operatorname{Ker} d^i_K\subseteq \operatorname{Ker} d^i_L)$, $f(\operatorname{Im} d^{i-1}_K)\subseteq \operatorname{Im}(d^{i-1}_L)$. Поэтому гомоморфизм комплексов $f$ индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H^i(K^\cdot)\to H^i(L^\cdot)$ (элемент $H^i(K^\cdot)$, представимый элементом $c\in K^i$, переходит в элемент $H^i(L^\cdot)$, представимый элементом $f(c)\in H^i(L^\cdot)$).

Следующее предложение является простейшим и самым известным фактом из гомологической алгебры.

**Предложение 27.22.** *Пусть $0\to K^\cdot\xrightarrow{f}L^\cdot\xrightarrow{g}M^\cdot\to 0$ — точная последовательность комплексов (по определению, это означает, что $f$ и $g$ — гомоморфизмы комплексов и что все последовательности*

$$0\to K^i\xrightarrow{f^i}L^i\xrightarrow{g^i}M^i\to 0$$

*точны). Тогда имеется бесконечная в обе стороны точная последовательность*

$$\begin{aligned}\ldots\to H^{i-1}(M^\cdot)\xrightarrow{\delta^{i-1}}H^i(K^\cdot)\xrightarrow{f_*}H^i(L^\cdot)\xrightarrow{g_*}H^i(M^\cdot)\xrightarrow{\delta^i}H^{i+1}(K^\cdot)\xrightarrow{f_*}\\ H^{i+1}(L^\cdot)\xrightarrow{g_*}H^{i+1}(M^\cdot)\xrightarrow{\delta^{i+1}}H^{i+2}(K^\cdot)\xrightarrow{f_*}H^{i+2}(L^\cdot)\to\ldots\end{aligned}\tag{27.4}$$

*Доказательство.* Для начала построим гомоморфизмы $\delta^j\colon H^j(M^\cdot)\to H^{j+1}(K^\cdot)$. Грубо говоря, $\delta=f^{-1}\circ d\circ g^{-1}$. Эта «формула» расшифровывается следующим образом. Пусть класс когомологий $\xi\in H^j(M^\cdot)$ представлен элементом $c\in M^j$, для которого $dc = 0$. Поскольку гомоморфизм $g^j\colon L^j \to M^j$ сюръективен, найдется такой элемент $b \in L^j$, что $g(b) = c$. Поскольку $dc = 0$, имеем: $g(db) = dg(b) = dc = 0$. Следовательно, элемент $db \in L^{j+1}$ лежит в ядре гомоморфизма $g$; ввиду точности последовательности комплексов получаем, что $db = f^{j+1}(a)$, где $a \in K^{j+1}$; ввиду инъективности гомоморфизма $f^{j+1}$ элемент $a$ однозначно определен. Заметим теперь, что $f(da) = df(a) = ddb = 0$; следовательно, $a \in \operatorname{Ker} d^{j+1}$, и элемент $a$ определяет некоторый класс когомологий $\eta \in H^{j+1}(K^\cdot)$. Положим по определению $\delta^j(\xi) = \eta$. Грубо говоря, $\delta = f^{-1} \circ d \circ g^{-1}$.

Проверим, что элемент $\eta$ не зависит от произвола в выборе $c$ и $b$. В самом деле, если в качестве прообраза $c$ мы выберем не $b$, а $b' \in K^j$, то имеем $g(b' - b) = 0$, откуда $b' - b = fa'$ для некоторого $a' \in K^j$. Следовательно, $db' = d(b + fa') = db + f(da') = f(a + da')$. Тем самым прообразом $db'$ в $K^{j+1}$ будет не $a$, но $a + da'$; поскольку $a$ и $a + da'$ определяют один и тот же элемент в $H^{j+1}(K^\cdot)$, на $\delta(\xi)$ такая замена не повлияет.

Если же в качестве представителя класса $\xi \in H^j(M^\cdot)$ выбрать не $c$, а $c + dc'$, где $c' \in M^{j-1}$, то заметим, что, ввиду сюръективности отображения $g$, имеем $c' = g(b')$, где $b' \in L^{j-1}$, так что в качестве прообраза элемента $c + dc'$ можно выбрать $b + db' \in L^j$ (как мы только что проверили, прообраз элемента из $M^j$ мы можем выбирать произвольно); поскольку $d(b + db') = db + ddb' = db$, дальнейшие шаги в определении $\delta(\xi)$ будут такие же, как если бы мы начинали с элемента $c$. Таким образом, от произвола в выборе $c$ также ничего не зависит, и гомоморфизмы $\delta^j$ построены.

Остается убедиться, что последовательность (27.4) действительно точна. Поверим сначала точность в членах $H^i(M^\cdot)$. Итак, надо проверить, что $\operatorname{Im} g^i_* \subseteq \operatorname{Ker} \delta^i$ и $\operatorname{Ker} \delta^i \subseteq \operatorname{Im} g^i_*$.

Первое из этих включений равносильно равенству $\delta^i \circ g^i_* = 0$. И действительно, если класс $\mu \in H^i(L^\cdot)$ представлен элементом $b \in L^i$, то класс $g_*\mu \in H^i(M^\cdot)$ представлен элементом $g(b) \in M^i$, а класс $\delta(g_*(\mu))$ представлен элементом $f^{-1}(db)$; поскольку по самому́ построению имеем $db = 0$, получаем, что $\delta g_*\mu = 0$.

Проверим теперь обратное включение $\operatorname{Ker} \delta^i \subseteq \operatorname{Im} g^i_*$. Предположим, что класс $\xi \in \operatorname{Ker} \delta^i \subseteq H^i(M^\cdot)$ представлен элементом $c \in M^i$. То обстоятельство, что $\delta\xi = 0$, означает, что существуют такие элементы $a \in K^{i+1}$ и $b \in L^i$, что $f(a) = db$ и $g(b) = c$, причем $a = da'$ для некоторого $a' \in K^i$. Теперь имеем $db = g(da') = d(ga')$; стало быть, $d(b - fa') = 0$. Пусть $\mu \in H^i(L^\cdot)$ — класс когомологий, представленный элементом $b - fa'$; поскольку $g(b - fa') = gb - gfa' = gb = c$, получаем, что $g_*(\mu) = \xi$, и $\xi \in \operatorname{Im} g_*$.

Для остальных членов последовательности рассуждения аналогичны; провести их самостоятельно — обязательное упражнение для читателя. □

*Доказательство теоремы Майера-Виеториса.* Для формы $\omega \in \Omega^i(X)$ положим $f(\omega) = (\omega|_U, \omega|_V) \in \Omega^i(U) \oplus \Omega^i(V)$ (черта означает ограничение формы на подмногообразие), а для пары $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^i(U) \oplus \Omega^i(V)$ положим $g(\omega_1, \omega_2) = \omega_1|_{U\cap V} - \omega_2|_{U\cap V} \in \Omega^i(U \cap V)$. Мы покажем, что имеет место точная последовательность

$$0 \to \Omega^\cdot(X) \xrightarrow{f} \Omega^\cdot(U) \oplus \Omega^\cdot(V) \xrightarrow{g} \Omega^(U \cap V) \to 0, \qquad (27.5)$$

после чего теорема окажется прямым следствием предложения 27.22.

В самом деле, инъективность гомоморфизма $f$ очевидна (если ограничения формы на $U$ и на $V$ равны нулю, то и сама форма равна нулю, поскольку $U \cup V = X$); равенство $g \circ f = 0$ также очевидно; чтобы проверить включение $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$, заметим, что равенство $g(\omega_1, \omega_2) = 0$ означает, что $\omega_1|_{U\cap V} = \omega_2|_{U\cap V}$, но тогда $\omega_1$ и $\omega_2$ склеиваются в одну форму $\omega \in \Omega^i(X)$ (для гладкости формы $\omega$ существенно, чтобы $X$ был объединением *внутренностей* многообразий $U$ и $V$), и имеем $(\omega_1, \omega_2) = f(\omega)$. Осталось проверить сюръективность гомоморфизма $g$. Для этого нам понадобится следующая полезная

**Лемма 27.23.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие и $Y \subset X$ — замкнутое гладкое подмногообразие (возможно, с краем). Тогда для всякой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(Y)$ найдется такая дифференциальная форма $\eta \in \Omega^k(X)$, что $\omega = \eta|_Y$.*

*Доказательство леммы.* Нам надо показать, что форма $\omega$ продолжается с подмногообразия $Y \subset X$ на все многообразие $Y$. Для начала заметим, что $\omega$ заведомо продолжантся *локально:* для всякой точки $y \in Y$ существуют такое содержащее ее открытое подмножество $U_y \subset X$ и форма $\eta_y \in \Omega^k(U_y)$, что $\eta_y|_{U_y \cap Y} = \omega|_{U_y\cap Y}$. В самом деле, если $y \in \operatorname{Int} Y$, то доказывать нечего; в противном случае у точки $y$ найдется такая окрестность $U_y \subset X$, что пара $(U_y, U_y \cap Y)$ диффеоморфна паре $(V, W)$, где $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытый шар и $W = \{ (x_1, \dots, x_n \in V \mid x_{m+1} = \dots = x_n = 0 \}$ или $W = \{ (x_1, \dots, x_n \in V \mid x_n \geqslant 0 \}$. В каждом из этих случаев очевидно, что гладкая функция на $W$ продолжается до гладкой функции на $V$. Поскольку всякая дифференциальная форма степени $k$ представляется (по крайней мере локально[3]) в виде суммы слагаемых вида $f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$, можно продолжить и форму (уменьшив, если нужно, окрестность $U_y$).

Теперь надо создать одно глобальное продолжение из многих докальных. Это делается, как и всегда в таких случаях, с помощью разбиения единицы. Именно, открытые подмножества $U_y$ для $y \in Y$ образуют, вместе с множеством $X \setminus Y$, открытое покрытие многообразия $X$. Пусть $\{f_\alpha\}$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию; для каждого $\alpha$ пусть $\eta_\alpha$ — построенная нами дифференциальная форма на открытом множестве, соответствующем $f_\alpha$ (если функции $f_\alpha$ соответствует открытое подмножество $X \setminus Y$, то положим $\eta_\alpha = 0$). Каждая из форм $f_\alpha \eta_\alpha$ прождолжается нулем до формы на всем $X$; будем их рассматривать именно как формы на $X$. Так как семейство форм $\{f_\alpha \eta_\alpha\}$ локально конечно, корректно определена форма $\eta = \sum_\alpha f_\alpha \eta_\alpha$. Для всякой точки $y \in Y$ и для всякого $\alpha$ имеем $(\eta_\alpha)_y = \omega_y$, откуда $\eta_y = (\sum_\alpha f_\alpha(y))\omega_y = \omega_y$, и форма $\eta$ дает искомое продолжение. $\square$

**Замечание 27.24.** Для аналитических многообразий аналог леммы 27.23 совершенно неверен; с этим обстоятельством связаны многие интересные эффекты.

Из леммы 27.23 сюръективность $g$ получается немедленно. Именно, пусть $\omega \in \Omega^i(U \cap V)$. Поскольку, очевидно, $U \cap V$ — подмногообразие с краем в $U$,

[3]На самом деле и глобально, но нам это не потребуется.

лемма показывает, что существует такая форма $\eta \in \Omega^i(U)$, что $\eta|_{U\cap V} = \omega$, и очевидно, что $\omega = g(\eta, 0)$. На этом доказательство точночти последовательности 27.5 и теоремы Майера-Виеториса завершается. $\square$

Имея в своем распоряжении теорему Майера-Виеториса, мы можем вычислить когомологии Де Рама для сфер произвольной размерности (и тем самым доказать предложение 27.10). Начнем с двух замечаний. Во-первых, для всякого многообразия (без края) $X$ имеем $H^i_{\mathrm{DR}}(X\times[0;1]) \cong H^i_{\mathrm{DR}}(X)$ — это утверждение доказывается дословно так же, как лемма 27.5. Во-вторых, если обозначить через $D^n$ «замкнутый $n$-мерный шар» (подмногообразие с краем в $\mathbb{R}^n$, определенное соотношением $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$), то имеем $H^0_{\mathrm{DR}}(D^n) = \mathbb{R}$ и $H^i_{\mathrm{DR}}(D^n) = 0$ при $i > 0$. Если заменить замкнутый шар на открытый, то это будет в точности следствие 27.6; для замкнутого шара требуется отдельное рассуждение, которое мы для экономии времени опустим.

Теперь будем вычислять когомологии $S^n$ индукцией по $n$. При $n = 1$ это уже сделано (см. предложение 27.4). Пусть теперь мы уже установили, что $H^i_{\mathrm{DR}}(S^{n-1})$ равно $\mathbb{R}$ при $i = 0, n-1$ и нулю в остальных случаях. Представим $S^n$ как $\{(x_1, \ldots, x_{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1$ и положим для малого $\varepsilon > 0$:

$$U = \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leqslant \varepsilon \,\};$$
$$V = \{\, (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant -\varepsilon \,\}.$$

Легко видеть, что $U$ и $V$ диффеоморфны $D^n$ (это устанавливается с помощью проекций из точек $(0, \ldots, 0, \varepsilon)$ и $(0, \ldots, 0, -\varepsilon)$ соответственно) и что $U\cap V$ диффеоморфно $S^{n-1} \times [0;1]$ (спроектируйте сферу на описанный цилиндр). Стало быть (по предположению индукции), $H^i_{\mathrm{DR}}(U \cap V)$ равно $\mathbb{R}$ при $i = 0, n-1$ и нулю в остальных случаях, и $H^i_{\mathrm{DR}}(U) = H^i_{\mathrm{DR}}(V) = 0$ при $i > 0$. Применим теперь к тройке $(S^n, U, V)$ теорему Майера-Виеториса. Заметим, что при $n > 1$ гомоморфизм $H^0_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^0_{\mathrm{DR}}(V) \to H^0_{\mathrm{DR}}(U \cap V)$ сюръективен: поскольку $H^0_{\mathrm{DR}}$ — это пространство локально постоянных функций, а пересечение $U\cap V$ при $i > 1$ связно, гомоморфизм, о котором идет речь, — это гомоморфизм из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, заданный формулой $(x, y) \mapsto x - y$, сюръективность которого очевидна. Следовательно, в нашей последовательности Майера-Виеториса гомоморфизм $H^1_{\mathrm{DR}}(S^n) \to H^1_{\mathrm{DR}}(U) \oplus H^1_{\mathrm{DR}}(V)$ инъективен; учитывая имеющуюся у нас информацию о когомологиях $U$, $V$ и $U\cap V$, последовательность Майера-Виеториса можно записать так:

$$0 \to H^1_{\mathrm{DR}}(S^n) \to 0 \to H^1_{\mathrm{DR}}(S^{n-1}) \to H^2_{\mathrm{DR}}(S^n) \to 0 \to H^2_{\mathrm{DR}}(S^{n-1}) \to H^3_{\mathrm{DR}}(S^n) \to 0 \ldots.$$

Стало быть, $H^1_{\mathrm{DR}}(S^n) = 0$ (при $n > 1$, разумеется), и $H^i_{\mathrm{DR}}(S^{n-1}) \cong H^{i+1}_{\mathrm{DR}}(S^n)$ при $i \geqslant 1$, так что утверждение про когомологии $S^n$ немедленно следует из утверждения про когомологии $S^{n-1}$. $\square$

Вычислив когомологии сфер, легко доказать вариант знаменитой «теоремы Брауэра о неподвижной точке»:

**Предложение 27.25.** *Пусть $f\colon D^n \to D^n$ — гладкое отображение. Тогда существует такая точка $x \in D^n$, что $f(x) = x$.*

*Доказательство.* Рассуждая от противного, предположим, что такой точки $x$ не существует. Тогда корректно определено отображение $r\colon D^n \to S^{n-1}$, переводящее точку $x \in D^n$ в точку пересечения луча $[f(x); x)$ со сферой $S^{n-1} \subset D^n$. Если $i\colon S^{n-1} \to D^n$ — вложение, то $r \circ i$ — тождественное отображение сферы $S^{n-1}$. Если для каждого отображения $\varphi$ обозначить через $\varphi^*$ индуцированное отображение в $n-1$-ых когомологиях Де Рама, то получим, что $i^* \circ r^* = (r \circ i)^*$ — тождественное отображение пространства $H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(S^{n-1})$. В силу только что доказанного предложения это пространство содержит ненулевые элементы, но при этом для всякого $\xi \in H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(S^{n-1})$ имеем $\xi = i^*(r^*(\xi)) = i^*(0) = 0$ (в пространстве $H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(D^n)$ нет других элементов, кроме нуля). Получилось противоречие! $\square$

Как известно, теорема Брауэра верна не только для гладких, но и для любых непрерывных отображений; чтобы доказать ее в такой редакции, надо воспользоваться не дерамовскими, а сингулярными когомологиями, у которых определен обратный образ класса когомологий относительно произвольного непрерывного отображения.

Теорема Майера-Виеториса открывает дорогу к вычислению когомологий «в промышленных масштабах»: надо только, как в нашем доказательстве предложения 27.10, разбить многообразие на две более простые составные части, причем желательно, чтобы мы уже что-то знали про когомологии этого пересечения. Ничто не мешает разбить многообразие и на большее число частей и считать когомологии многообразия с помощью многократного применения теоремы. Впрочем, при попытке провести эту идею на практике возникают тяжелые и запутанные выкладки; чтобы довести вычисления до конца, необходимо эти выкладки както организовать, то есть развить соответствующие алгебраические формализмы («когомологии Чеха» или «симплициальные когомологии», например). Кроме того, пользование когомологиями Де Рама сильно связывает руки: приходится работать только с гладкими многообразиями, в то время как в промежуточных выкладках вполне могут встретиться пространства, таковыми не являющимися (не говоря уж о том, что многие пространства, не являющиеся многообразиями, интересны и сами по себе); стало быть, надо вместо когомологий Де Рама пользоваться какойнибудь другой теорией когомологий, применимой к более широкому классу пространств (например, очень хороши сингулярные когомологии). Все это вы будете изучать в курсе топологии.