Группы отражений

Иван Аржанцев

Курс по мотивам глав 1-3 книги J. Humphreys "Reflection groups and Coxeter groups"

проведен в осеннем семестре 2000 года

Задачи к экзамену

Далее W – конечная группа, порожденная отражениями, Φ – ее система корней, $\Delta \subset \Phi$ – фиксированная система простых корней, $s_1, \ldots, s_n$ – соответствующие простые отражения, Π – система положительных корней, $l(w)$ – функция длины на W, w_0 – элемент максимальной длины в W.

1. Пусть D_n - группа преобразований R^n, порожденная всевозможными перестановками координат и сменами знака у четного числа координат. Доказать, что эта группа порождена отражениями и найти ее порядок.

2. Классифицировать все двумерные системы корней (с учетом длин).

3. Перечислить все неприводимые системы корней Φ, в которых длины простых корней могут быть подобраны так, что высота $\mathrm{ht}(\beta) \in Z$ для всех $\beta \in \Phi$.

4. Пусть Φ - система корней ранга n, состоящая из единичных векторов. Если $\Psi \subset \Phi$ - n-элементное подмножество и углы между элементами Ψ совпадают с соответствующими углами в некоторой системе простых корней в Φ, то Ψ - система простых корней в Φ (доказать).

5. Доказать, что никакое собственное подмножество множества Δ не порождает W.

6. Доказать, что если $\beta \in \Pi \setminus \Delta$, то $\mathrm{ht}(\beta) > 1$.

7. Пусть в условии обмена $l(w) = r$. Доказать, что номер i определен однозначно.

8. Доказать, что в каждой приведенной записи элемента w_0 каждое простое отражение встречается не менее одного раза.

9. Верно ли, что а) подгруппа б) фактор-группа группы Кокстера является группой Кокстера?

10. Описать все параболические подгруппы в S_n.

11. Решить проблему равенства слов в группе отражений.

12. Доказать, что любая инволюция в W есть произведение коммутирующих отражений. Сколько таких отражений нужно, чтобы представить элемент w_0 для каждой из неприводимых систем корней? Верно ли, что любая инволюция есть произведение коммутирующих простых отражений?

13. Доказать, что если $s_1, ..., s_r$ различны, то $l(s_1 ... s_r) = r$.

14. Пусть $\Psi \subset \Phi$ - подмножество и $W =< s_\alpha | \alpha \in \Psi >$. Доказать, что $\forall \alpha \in \Phi \ \exists w \in W \ : \ w\alpha \in \Psi$.

15. Доказать, что если $\mathrm{rk}\Phi = n$, то $-E \in W \ \Leftrightarrow$ в Φ есть n ортогональных (попарно) корней. Указать такие множества корней для $B_n, D_{2k}, G_2, F_4, E_7, E_8$.

16. Найти $\max m : (Z_2)^m \subset W_{E_8}$.

17. Пусть Φ - кристаллографическая система корней, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ - положительные корни и $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n \in \Phi$. Доказать, что $\exists \pi \in S_n :$ $\beta_{\pi(1)} + ... + \beta_{\pi(k)} \in \Phi \ \forall \ k = 1, 2, \ldots, n$.

18. Определим элементы $\tilde{w}_i$ требованиями $\frac{2(\tilde{w}_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij}$ для всех $\alpha_j \in \Delta$.

    Доказать, что
$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{w}_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha_j \in \Pi} \alpha_j$$

19. Для E_6 $(\alpha_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_8) - \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7),\ \alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,\ \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2,\ \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,\ \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4)$ найти $\tilde{w}_2$ и $\tilde{w}_6$.

20. Найти центры групп отражений.

21. Представить группу G_2 как группу Кокстера с приводимой системой Кокстера.

22. Найти число орбит для действия $W : \Phi$ для всех неприводимых нормированных $(|\alpha| = 1)$ систем корней.

23. Вычислить порядки всех неприводимых групп отражений.

24. Указать системы корней E_6, E_7, E_8 явно.

25. Выразить сумму всех положительных корней E_6 как линейную комбинацию простых корней.

26. Доказать, что представление $W : S/I$ изоморфно регулярному представлению группы W.

27. Пусть $A \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ - градуированная свободная подалгебра с единицей. Доказать, что A может быть порождена однородными алгебраически независимыми элементами.

28. Пусть B подкольцо с единицей области целостности A, $F = QB$, $E = QA$ (поля частных), $[E : F] = r < \infty$. Доказать, что если A есть свободный B - модуль, то его ранг равен r.

29. Пусть $W : R^n$ -существенная группа отражений, $g_1,\ g_2, \ldots, g_n$ - алгебраически независимые однородные инварианты степеней $e_1, \ldots, e_n$. Доказать, что если $\prod e_i = |W|$, то $g_1,\ g_2, \ldots, g_n$ порождают алгебру инвариантов.

30. $(W = A_n)$ $x_{n+1} = -(x_1 + \ldots + x_n),\ f_i = x_1^{i+1} + \ldots + x_{n+1}^{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$

    $(W = B_n)$ $f_i = x_1^{2i} + \ldots + x_n^{2i}$ $(1 \leq i \leq n)$

    $(W = D_n)$ $f_i = x_1^{2i} + \ldots + x_n^{2i}$ $(1 \leq i \leq n-1)$, $f_n = x_1 x_2 \ldots x_n$

    $(W = I_2(m))$ $f_1 = x^2 + y^2,\ f_2 = Re(z^m)$

Вычислить якобианы, разложить их на линейные множители и доказать, что $\{f_i\}$ - образующие алгебры инвариантов.

31. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ - базис алгебры инвариантов для W, $J = J(f_1, \ldots, f_n)$, l_α - линейные функции, отвечающие зеркалам H_α, $\alpha \in \Phi$. Доказать, что

    1) $J = k \prod_{\alpha \in \Pi} l_\alpha, \ k \in R^*$

    2) $f \in A \Leftrightarrow \exists g \in B : f = Jg$

    3) $\mathrm{dim} A_k = \mathrm{dim} B_{k-N}, \ N = \# \Pi$

    (здесь A – пространство знакопеременных многочленов, B – алгебра инвариантов)

32. Доказать, что все элементы Кокстера сопряжены.

33. Указать какой-либо элемент Кокстера w и найти число Кокстера h для групп типа $A_n, \ B_n, \ D_n, \ I_2(m)$.

34. Пусть w - элемент Кокстера. Доказать, что у w нет собственного значения 1. Если $\{m_i\}$ - экспоненты, то наборы $\{m_i\}$ и $\{h - m_i\}$ совпадают.

35. Доказать, что множество простых отражений можно разбить на два непустых подмножества, внутри которых элементы попарно коммутируют. Однозначно ли такое разбиение?

36. Доказать теорему: $d_i = m_i + 1$

37. Доказать теорему:
$$W(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t^{d_i} - 1}{t - 1}$$

38. Найти набор степеней для групп типа H_3, H_4, F_4.

39. Найти набор степеней для групп типа E_6, E_7, E_8.

40. Проверить теорему о двойственном разбиении явно для E_6.