ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И РАССЛОЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 1

Пусть M — гладкое многообразие. *Римановой метрикой* на нем называется семейство скалярных произведений g_a в касательных пространствах T_aM, гладким образом зависящее от точки $a \in M$. Последнее требование означает, что для произвольных гладких векторных полей X, Y на многообразии M их скалярное произведение $g_a(X(a), Y(a))$ — гладкая функция точки a.

Пример 1. Возьмем в качестве многообразия $M = \mathbb{R}^n$. Касательное пространство $T_a\mathbb{R}^n$ в произвольной точке $a \in \mathbb{R}^n$ можно отождествить со стандартным векторным пространством $\mathbb{R}^n$. Действительно, на $M = \mathbb{R}^n$ имеется стандартная глобальная система координат $x_1, \dots, x_n$ (значение i-й координаты x_i в точке $a = (a_1, \dots, a_n) \in M$ равно a_i), и поэтому в каждом пространстве $T_a\mathbb{R}^n$ возникает соответствующий базис $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \xi_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$. А задание в векторном пространстве базиса и означает отождествление его со стандартным пространством $\mathbb{R}^n$. Произвольный вектор $v \in T_aM$ записывается в этом базисе как $v = \sum_{i=1}^n v^i \xi_i$. Следовательно, задать риманову метрику на $M = \mathbb{R}^n$ означает задать семейство g_a положительно определенных квадратичных форм (скалярных произведений) на пространстве $\mathbb{R}^n$, гладко зависящих от параметра $a \in \mathbb{R}^n$. Например, можно положить $g_a(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^n p_i(a) v_1^i v_2^i$, где $p_1(a), \dots, p_n(a)$ — произвольные гладкие положительные функции. Самый стандартный пример здесь $p_1(a) = \dots = p_n(a) \equiv 1$, когда скалярное произведение "не зависит от точки a". Следует понимать, однако, что о независимости от точки имеет смысл говорить только если задана система координат x_i — инвариантного смысла эта независимость не имеет.

Пример 2. M — плоскость Лобачевского. Как многообразие, M диффеоморфно $\mathbb{R}^2$, а реализуется обычно в виде открытой верхней полуплоскости $H \subset \mathbb{R}^2$, что дает на M глобальную систему координат (x, y). На H имеется стандартная риманова метрика $g(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}, w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{y^2}$.

Если $F : M_1 \to M_2$ — гладкое отображение многообразий, и на M_2 имеется риманова метрика g, то на M_1 возникает индуцированная метрика F^*g, заданная правилом $(F^*g)_a(v_1, v_2) = g_{F(a)}(DF_a v_1, DF_a v_2)$. Здесь $DF_a : T_aM_1 \to T_{F(a)}M_2$ — дифференциал отображения F в точке a. Часто рассматривают частный случай этой конструкции, когда $M_2 = \mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой, а F — вложение. Тем самым, любое подмногообразие евклидова пространства наделено индуцированной римановой метрикой.

Два римановых многообразия (M_1, g_1) и (M_2, g_2) называются изометричными, если существует диффеоморфизм $F : M_1 \to M_2$, для которого $F^*g_2 = g_1$. Два римановых многообразия одной и той же размерности могут быть не изометричны даже локально (напомним, что любые два многообразия одной размерности локально диффеоморфны по определению). Чтобы продемонстрировать это, нам придется ввести несколько новых понятий.

Простейший — числовой — инвариант римановых многообразий — объем. Предположим, что M — ориентированное риманово многообразие размерности n с метрикой g. Определим на нем n-форму ν (называемую формой объема), полагая ее значение на наборе касательных векторов $v_1, \dots, v_n \in T_aM$ равным ориентированному объему параллелепипеда, натянутого на них (ориентированный объем параллелепипеда определен, коль скоро в пространстве T_aM задано скалярное произведение g_a и ориентация). Объем многообразия $\operatorname{vol} M = \int \nu$ не меняется при изменении ориентации и поэтому определяется римановой метрикой — следовательно, он должен быть одинаковым у изометричных многообразий.

Объем является глобальным инвариантом риманова многообразия. Два римановых многообразия M и N могут иметь различный объем, но быть локально изометричными (т.е. достаточно малые открытые подмножества M и N изоморфны как римановы многообразия). В качестве примера таких M и N можно взять две окружности разных радиусов на евклидовой плоскости — их открытые дуги одинаковой длины изометричны. То же самое верно для двух произвольных кривых (римановых многообразий размерности 1). Для многообразий большей размерности, однако, локальная изометричность также может не иметь места — мы вскоре приведем пример в размерности 2.

Стандартным образом задание скалярного произведения позволяет определить понятие длины касательного вектора и угла между двумя касательными векторами, приложенными в одной и той же точке. Пусть $\gamma : [0, 1] \to M$ — гладкая параметризованная кривая на римановом многообразии M. *Длиной* кривой называется величина $\ell(\gamma) = \int_0^1 \left(g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)^{1/2} dt$. Кривая γ называется *геодезической*, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $T \in [0, 1]$ отрезок кривой γ при $t \in [T, T + \varepsilon]$ является кратчайшей из кривых, соединяющих точки $\gamma(T)$ и $\gamma(T + \varepsilon)$. Например, геодезические в $\mathbb{R}^n$ с "постоянной" метрикой это отрезки прямых. Геодезические на плоскости Лобачевского — отрезки прямых Лобачевского (изображаемые в стандартной модели дугами окружностей с центром на границе полуплоскости, а также вертикальными отрезками прямых).

Утверждение 1. 1. *Для каждой точки a риманова многообразия M существует такая ее окрестность U, что произвольные точки $b, c \in U$ соединяются единственной геодезической минимальной длины. Если опустить здесь требование единственности, то в качестве U можно взять все многообразий M.*

2. *Для всякой точки $a \in M$ и всякого касательного вектора $v \in T_aM$ существует единственная (если рассматривать ее вблизи a) геодезическая, касательная к которой в точке a совпадает с v.*

Доказывать утверждение мы не будем. Из него следует, в частности, что задание римановой метрики наделяет многообразие M структурой метрического пространства: в качестве расстояния между точками a и b можно взять длину минимальной геодезической, соединяащей эти точки. Очевидно, если отображение $F : M_1 \to M_2$ осуществляет изометрию римановых многообразий, то оно переводит геодезические в геодезические.

Пусть $\dim M = 2$. Рассмотрим 4 точки a, b, c, d, находящиеся достаточно близко друг к другу (так, чтобы любые две из них соединялись минимальной геодезической). Нарисуем соответствующий геодезический четырехугольник. Если M локально изометрично $\mathbb{R}^2$ со стандартной метрикой, то при изометрии этот четырехугольник должен переходить в обычный плоский четырехугольник (стороны — отрезки). Но поскольку изометрия сохраняет углы, из этого следует, что сумма 4 углов исходного геодезического четырехугольника должна быть равна 2π. Нетрудно, однако, привести пример — скажем, плоскость Лобачевского, или сфера, стандартно вложенная в $\mathbb{R}^3$ — когда это не так.

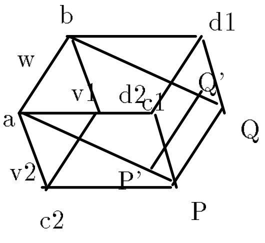
Существует инвариант римановых многообразий — *форма кривизны* — выражающий это отличие количественно. Мы построим этот инвариант в случае когда $\dim M = 2$, и M ориентировано.

Зафиксируем точку $a \in M$ и два вектора, $v, w \in T_aM$. Проведем из a геодезические γ_v, γ_w в направлении этих векторов, и запараметризуем их так, чтобы $g_{\gamma_v(t)}(\dot\gamma_v(t), \dot\gamma_v(t)) \equiv g_a(v, v)$, и аналогично для γ_w. Возьмем точку $b = \gamma_v(\varepsilon)$, и отложим в T_bM вектор w', равный по длине вектору w и образующий с вектором $\dot\gamma_v(\varepsilon)$ угол, равный углу между векторами v и w. Аналогично построим точку $c = \gamma_w(\delta)$ и вектор $v' \in T_cM$. Проведем через точки b и c геодезические в направлении векторов w' и v' соответственно, и обозначим d точку их пересечения. Пусть $\varphi(v, w, \varepsilon, \delta) = \pm(-2\pi + \sum$ углов четырехугольника $abdc)$ (величина в скобках обычно называется дефектом четырехугольника). Знак выберем в зависимости от того, совпадает ли ориентация пары векторов v, w с заранее выбранной ориентацией пространства T_a, или нет. Положим $r(v, w) = \lim_{\varepsilon,\delta\to 0} \varphi(v, w, \varepsilon)/(\varepsilon\delta)$.

Теорема 1. *Выражение $r(v, w)$ билинейно и кососимметрично.*

Тем самым $r(v, w)$ определяет 2-форму r на поверхности M, называемую формой кривизны римановой метрики.

Доказательство.
Кососимметричность очевидна, поскольку она выполнена уже для $\varphi(v, w, \varepsilon, \delta)$ (следует из правила выбора знака). Однородность следует из очевидного равенства $\varphi(\lambda v, w, \varepsilon, \delta) = \varphi(v, w, \lambda\varepsilon, \delta)$, и аналогично для w. Аддитивность следует из рисунка: точки P и P' не совпадают, но расходятся на $o(\varepsilon\delta)$; дефекты четырехугольников abd_2c_2 и c_1d_1QP также отличаются на $o(\varepsilon\delta)$, поэтому дефект четырехугольника $abQ'P'$ равен, с точностью до $o(\varepsilon\delta)$, сумме дефектов четырехугольников abd_1c_1 и abd_2c_2.



□

Теорема 2 (формула Гаусса–Бонне)**.** *Пусть M — компактное ориентируемое двумерное многообразие (сфера с g ручками), а r — форма кривизны некоторой римановой метрики на M. Тогда $\int_M r = 2\pi\chi(M) = 2\pi(2 - 2g)$.*

Набросок доказательства. Разобьем поверхность M на конечное число многоугольников, стороны которых — геодезические минимальной длины (как в утверждении 1). Из определения формы кривизны немедленно следует, что ее интеграл по такому n-угольнику равен его дефекту, взятому со знаком минус, т.е. $-\pi(n - 2) + \sum$ углов. Таким образом, интеграл по всей поверхности равен взятой со знаком минус сумме дефектов всех многоугольников. Если всего многоугольников F штук, общее число ребер E, а вершин V, то сумма дефектов равна $\pi(2E - 2F) - 2\pi V = -2\pi\chi(M)$, что доказывает теорему. □

Доказательство существования разбиения поверхности на геодезические многоугольники — непростая техническая проблема. Мы не будем тратить силы на ее решение, поскольку в будущем докажем обобщение формулы Гаусса–Бонне на многомерный случай.