ЛЕКЦИЯ 2

В данной лекции мы рассматриваем векторное расслоение $\pi : E \to B$ с базой B, $\dim B = n$, и типичным слоем $F = \mathbb{R}^m$. Слой над точкой $a \in B$ (т.е. множество $\pi^{-1}(a) \subset E$) будет обозначаться E_a.

Говорят, что на E задан *параллельный перенос* P, если каждой гладкой кривой $\gamma : [0,1] \to B$ поставлен в соответствие линейный оператор $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$, причем выполняются такие условия:

1. Перенос вдоль тождественной кривой тривиален: если $\gamma(t) \equiv a$, где $a \in B$, то $P_\gamma = \mathrm{id}_{E_a}$.
2. Полугрупповое свойство: пусть $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Тогда очевидным образом определена композиция кривых $\gamma = \gamma_1 \circ \gamma_2$. Требуется, чтобы $P_\gamma = P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1}$.
3. Независимость от (сохраняющей ориентацию) замены параметра: если $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$, где $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ — гладкая монотонная функция, то $P_{\gamma_2} = P_{\gamma_1}$.
4. Свойство обращения: если $\gamma_2(t) \equiv \gamma_1(1-t)$, то $P_{\gamma_2} = P_{\gamma_1}^{-1}$.
5. Непрерывность: оператор P_γ зависит от кривой γ непрерывно.

Свойство 5 требует уточнения, поскольку на множестве кривых можно задавать различные топологии. Мы не будем делать этого уточнения (оставив позднее из-за этого одну лемму недоказанной).

Параллельный перенос называется *плоским* (или *локальной системой*), если оператор P_γ не меняется при гомотопии кривой γ с фиксированными концами.

Пример 1. Расслоение E тривиально: $E = B \times F$; $P_\gamma((\gamma(0), u)) = (\gamma(1), u)$. Параллельный перенос P, очевидно, плоский.

Пример 2. $B = \mathbb{R}P^1$, расслоение $\pi : E \to B$ тавтологическое: слой над точкой $a \in \mathbb{R}P^1$ это ровно та прямая в $\mathbb{R}^2$, которую эта точка представляет. Кривая $\varrho \subset E$ это просто кривая $\varrho \subset \mathbb{R}^2$, с такой дополнительной информацией: если $\varrho(t) = 0$, то отмечена некоторая прямая $\ell_t \subset \mathbb{R}^2$, проходящая через 0 (если $\varrho(t) \neq 0$, то ℓ_t это просто прямая, проходящая через 0 и $\varrho(t)$).

Для каждой кривой $\gamma \subset \mathbb{R}P^1$ и каждой точки $u \in E_{\gamma(0)}$ существует единственная кривая $\tilde{\gamma}_u \subset E$ (“подъем” кривой γ), для которой $\tilde{\gamma}_u(t) \in \gamma(t)$, $\tilde{\gamma}_u(0) = u$, и $|\tilde{\gamma}_u(t)| = const$. Параллельный перенос P сопоставляет точке u точку $\tilde{\gamma}_u(1) \in E_{\gamma(1)}$. Этот параллельный перенос плоский. Заметим, однако, что параллельный перенос вдоль нестягиваемой замкнутой кривой в $\mathbb{R}P^1$ (это разворот прямой на угол π) нетривиален: он действует в слое $E_{\gamma(0)} = E_{\gamma(1)}$ как умножение на -1.

Пусть кривая γ замкнутая. Тогда P_γ является линейным преобразованием слоя над точкой $a = \gamma(0)$.

Предложение 1. *Операторы P_γ для всех кривых γ с началом и концом в точке a образуют подгруппу группы линейных преобразований слоя E_a. Если параллельный перенос P плоский, то P_γ зависит только от элемента $[\gamma] \in \pi_1(B, a)$, а соответствие $[\gamma] \mapsto P_\gamma$ является линейным представлением группы $\pi_1(B, a)$. Если это представление тривиально, то расслоение E также тривиально.*

Доказательство очевидно. Построенная группа называется *группой голономии* параллельного переноса (в плоском случае — *группой монодромии*).

Рассмотрим параллельные переносы вдоль очень коротких кривых. Для этого рассмотрим точку $a \in B$ и зафиксируем в некоторой ее окрестности тривиализацию расслоения E; теперь мы можем складывать и сравнивать векторы из различных (близких) слоев. Введем еще скалярное произведение на слое F, чтобы иметь возможность вычислять длины векторов из слоя. Рассмотрим касательный вектор $X \in T_aB$ и параллельный перенос вдоль кривой γ, представляющей X. Поскольку γ определена с точностью до членов 2 порядка малости, оператор P_γ имеет смысл рассматривать с той же точностью: $P_\gamma(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u - \nabla_X(u) + o(|X|)$. Операция ∇_X обладает такими свойствами:

1. $\nabla_X(u)$ зависит от вектора X линейно.
   Это доказывается примерно так же, как линейность формы кривизны в лекции 1 — детали мы не приводим.
2. Если задано (локально) сечение s расслоения (т.е. $s(b) \in E_b$), функция $f(b)$ и векторное поле $X(b)$ на базе B (b лежит в некоторой окрестности точки $a \in B$), то $\nabla_X(fs) = f\nabla_X(s) + (Xf) \cdot s$. Здесь Xf означает результат действия X, как дифференциального оператора 1 порядка, на функцию f.

Доказательство. Это следствие линейности операторов P_γ: пусть $X = X(a)$, $u = s(a)$ и $P_X : E_a \to E_{a+X}$. Тогда с точностью до 2 порядка $P_X(fu) = f(a)P_X(u) = f(a)(u - \nabla_X(s)(a)) = f(a+X)u - (Xf)(a)u - f(a+X)\nabla_X(s)(a)$. С другой стороны, $P_X(fu) = f(a+X)u - \nabla_X(fs)(a)$, откуда вытекает требуемая формула. $\square$

Все вышесказанное мотивирует такое

Определение. *Ковариантным дифференцированием* на расслоении E называется отображение пространств сечений $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*B \otimes E)$, обладающее свойством $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$.

Напомним, что символом $\Gamma(A)$ мы обозначаем множество сечений векторного расслоения A (подразумевается — с базой B). Таким образом, если s — сечение исходного расслоения E, то $\nabla(s)$ — сечение $T^*B\otimes E$, т.е. 1-форма на B со значениями в расслоении E. Тогда старая операция ∇_X (ковариантная производная вдоль векторного поля X) задается формулой $\nabla_X(s) \stackrel{\text{def}}{=} \langle\nabla(s), X\rangle$. Из того, что $\nabla_X(s)$ получается спариванием векторного поля X и 1-формы, вытекает свойство 1 — линейность по полю X. Свойство 2 эквивалентно формуле, приведенной в определении — напомним, что $\langle df, X\rangle = Xf$.

Пусть параллельный перенос P — плоский. Из этого вытекает (а на самом деле эквивалентно этому), что параллельные переносы по двум парам соседних сторон маленького параллелограмма совпадают с точностью до 2 порядка. Если стороны параллелограмма это векторы $X, Y \in T_aB$, то имеем: $u - \nabla_X(u) - \nabla_Y(u - \nabla_X(u)) = u - \nabla_Y(u) - \nabla_X(u - \nabla_Y(u))$, т.е. $\nabla_X(\nabla_Y(u)) = \nabla_Y(\nabla_X(u))$. Это мотивирует

Определение. Ковариантное дифференцирование ∇ называется плоским, если операторы ∇_X и ∇_Y коммутируют для любых двух коммутирующих векторных полей X и Y.

Сечение $s \in \Gamma(E)$ называется ковариантно постоянным вдоль кривой $\gamma : [0,1] \to B$, если $\nabla_{\dot\gamma(t)} s(\gamma(t)) \equiv 0$. Это условие — линейное дифференциальное уравнение 1 порядка (мы позднее напишем его в координатах), и поэтому для каждой точки $u \in E_{\gamma(0)}$ существует и единственно (глобально, для всех $t \in [0,1]$!) ковариантно постоянное сечение $\tilde\gamma_u$, для которого $\pi(\tilde\gamma_u(t)) = \gamma(t)$ и $\tilde\gamma_u(0) = u$. Кроме того, сечение $\tilde\gamma_u$ зависит от начального условия u линейно. Поэтому, полагая $P_\gamma(u) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde\gamma_u(1) \in E_{\gamma(1)}$, получим параллельный перенос на E. Очевидно, что описанное ранее "дифференцирование" параллельного переноса P приводит опять к ковариантному дифференцированию ∇.

Предложение 2. *Описанные выше преобразования задают взаимно однозначное соответствие между множеством ковариантных дифференцирований и множеством параллельных переносов на векторном расслоении E. При этом плоским параллельным переносам (локальным системам) соответствуют плоские ковариантные дифференцирования.*

Доказательство взаимной обратности (и, следовательно, взаимной однозначности) описанных выше соответствий почти очевидно, но чтобы сделать его корректным, нужно было бы уточнить требование непрерывности 5. Ранее было показано, что плоским параллельным переносам соответствуют плоские ковариантные дифференцирования. Доказательство обратного утверждения — упражнение.

Пусть расслоение $E = B \times F$ тривиально. Это эквивалентно тому, что на B задан набор сечений $e_1, \dots, e_m \in \Gamma(E)$, образующих базис в каждом слое. Пусть также на B фиксирована система координат $(x^1, \dots, x^n)$. Тогда сечения E это вектор-функции $s(x) = u^1(x)e_1 + \dots + u^m(x)e_m$. Пусть $\nabla(e_i) = \sum_{k=1}^m \theta_i^k(x)e_k$, где $\theta_i^k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=1}^n \Gamma_{il}^k(x)dx^l$ — 1-формы на B (функции $\Gamma_{il}^k(x)$ называются символами Кристоффеля). Тогда $\nabla(s) = \sum_{i=1}^m e_i \cdot \left(du^i(x) + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i(x)u^k(x)dx^l\right)$.

Символы Кристоффеля зависят от двух наборов данных — от координат $x^1, \dots, x^n$ и от сечений $e_1, \dots, e_n$. При замене координат формы θ_i^k не изменяются, поэтому набор символов $\Gamma_{il}^k(x)$ преобразуются как коэффициенты матричнозначной дифференциальной формы ("индекс l — тензорный"). При замене набора базисных сечений (т.наз. калибровочном преобразовании) происходит следующее: пусть $e_i' = \sum_{j=1}^m g_i^j(x)e_j$. Тогда $\nabla(e_i') = \sum_{k=1}^m (\theta')_i^k(x)e_k' = \sum_{k=1}^m (\theta')_i^k(x)\sum_{l=1}^m g_k^l(x)e_l$. С другой стороны, $\nabla(e_i') = \nabla(\sum_{j=1}^m g_i^j(x)e_j) = \sum_{j=1}^m dg_i^j(x) \cdot e_j + \sum_{j=1}^m g_i^j(x)\sum_{l=1}^m \theta_j^l(x)e_l$, откуда $\theta' = dg \cdot g^{-1} + g \cdot \theta \cdot g^{-1}$, где $\theta = (\theta_j^k(x))$ рассматривается как матрица 1-форм (или, что то же самое, 1-форма со значениями в матрицах).

Множество $\Gamma(A)$ сечений векторного расслоения A с базой B является модулем над кольцом $C^\infty(B)$ гладких функций на базе. Если $g \in \Gamma(\mathrm{Hom}(A_1, A_2))$ (иными словами, g — набор линейных отображений $g_a : (A_1)_a \to (A_2)_a$ слоев одного расслоения в соответствующие слои другого расслоения), то формула $s \mapsto gs$ задает гомоморфизм модулей $\Gamma(A_1) \to \Gamma(A_2)$.

Лемма. *Любой гомоморфизм модулей $\Gamma(A_1) \to \Gamma(A_2)$ имеет такой вид для некоторого g.*

Идея доказательства. Для тривиальных расслоений A_1 и A_2 лемма доказывается легко. Общий случай сводится к случаю тривиальных расслоений рассмотрением подходящего разбиения единицы на базе. □

Предложение 3. *Множество ковариантных дифференцирований векторного расслоения E является аффинным пространством, натянутым на векторное пространство 1-форм на базе расслоения со значениями в $\mathrm{End}(E) = E^* \otimes E$ (то есть на пространство $\Gamma(T^*B \otimes E^* \otimes E)$).*

Доказательство. Нетрудно доказать (с использованием разбиения единицы на базе и уже разобранного случая тривиального расслоения), что на расслоении E существует по крайней мере одно ковариантное дифференцирование ∇_0. Пусть ∇_1 — другое ковариантное дифференцирование. Тогда $\nabla_1 - \nabla_0 : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*B \otimes E)$ — гомоморфизм модулей, поскольку $\nabla_1(fs) - \nabla_0(fs) = df \otimes s + f\nabla_1(s) - df \otimes s - f\nabla_0(s) = f(\nabla_1(s) - \nabla_0(s))$. По лемме существует (и единственно) сечение $\omega \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, T^*B \otimes E)) = \Gamma(T^*B \otimes E^* \otimes E)$ такое, что $\nabla_1(s) - \nabla_0(s) = \omega \cdot s$. $\square$