ЛЕКЦИЯ 3

Пусть точка $u \in E$ такова, что $\pi(u) = a \in B$. Рассмотрим касательное пространство T_uE. Оно имеет размерность $m+n$ и содержит m-мерное подпространство V_u, состоящее из векторов, касательных к слою $E_a \subset E$. Поскольку E_a — векторное пространство, можно отождествить V_u с E_a. Для произвольного сечения $u \in \Gamma(E)$ такого, что $s(a) = u$, касательное пространство H_u к его графику в точке u трансверсально к V_u (и имеет размерность n) — как говорят, "трансверсально к слою расслоения". Всякое подпространство $H \subset T_uE$, трансверсальное к слою, можно получить таким образом. Отсюда следует, что все трансверсальные к слою подпространства пространств T_uE для точек u, принадлежащих *одному и тому же* слою E_a, образуют линейное пространство — сложение и умножение на числа индуцируется соответствующими операциями над сечениями (необходимо, конечно, проверить корректность). При этом если $H_1 \subset T_{u_1}E$, $H_2 \subset T_{u_2}E$, то $H_1 + H_2 \subset T_{u_1+u_2}E$, и аналогично для умножения.

Определение. Набор подпространств $H_u \subset T_uE$, гладко зависящих от $u \in E$ (гладкое распределение), называется *связностью*, если

1. H_u трансверсально $V_u \subset T_uE$, и $H_u + V_u = T_uE$.
2. $H_{u_1} + H_{u_2} = H_{u_1+u_2}$, $H_{\alpha u} = \alpha H_u$ (в смысле, объясненном выше).

Разбиение подпространства T_uE в прямую сумму $V_u + H_u$ эквивалентно выбору проектора $P_u : T_u \to E_a$ (если проектор выбран, то H_u и V_u — его собственные подпространства, отвечающие собственным значениям 0 и 1). Пусть теперь $s : B \to E$ — сечение расслоения E, и $s(a) = u$. Дифференциал ds является линейным оператором $T_aB \to T_uE$. Пусть X — векторное поле на B.

Предложение 1. *Для всякой связности H_u формула $\nabla_X(s)(a) = -P_u(ds(a)(X(a)))$ задает ковариантное дифференцирование. Всякое ковариантное дифференцирование может быть получено таким образом.*

Доказательство. Проверим, что ∇ — ковариантное дифференцирование. Для каждой кривой $\gamma : [0,1] \to B$ и произвольного $u \in E_{\gamma(0)}$ существует и единственна кривая $\tilde\gamma_u : [0,1] \to E$ (подъем γ), такая что $\pi(\tilde\gamma_u \equiv \gamma$ и $\tilde\gamma_u(0) = u$. Определим оператор P_γ равенством $P_\gamma(u) = \tilde\gamma_u(1)$. Из свойства 2 вытекает, что $\tilde\gamma_{u_1+u_2} = \tilde\gamma_{u_1} + \tilde\gamma_{u_2}$ и $\tilde\gamma_{\alpha u} = \alpha\tilde\gamma_u$. Ввиду этого оператор $P_\gamma : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(1)}$ линеен. Легко видеть, что операторы P_γ образуют систему параллельных переносов, и ∇ — соответствующее ковариантное дифференцирование.

Пусть, наоборот, ∇ — ковариантное дифференцирование, а s_u — сечение, для которого $s_u(a) = u$ и $\nabla(s_u)(a) = 0$ (эти условия определяют s_u с точностью до членов 2 порядка). Положим $H_u = ds_u(T_aB)$ — трансверсальность слою выполнена автоматически. Нетрудно видеть, что сечение s_u зависит от u линейно, откуда следует, что H_u — связность. □

Зафиксируем связность, и рассмотрим операцию, сопоставляющую вектору $X \in T_uE$ вектор $P_u(X) \in E_a$. Очевидно, эта операция линейная; пространство H_u состоит из векторов, обнуляемых этой операцией, а пространство V_u — из векторов, переводимых ею в себя (мы отождествляем V_u и E_a. Таким образом, мы определили на E 1-форму ω со значениями в расслоении π^*E (базой которого служит E, а слоем над точкой $u \in E$ — подпространство V_u), обладающую следующими свойствами:

1. $\langle \omega, X\rangle = X$, если $X \in V_u$.
2. Подпространства $H_u = \{X \in T_uE : \langle\omega, X\rangle = 0\}$ линейно зависят от u (в смысле, объясненном ранее).

Такие формы называются *формами связности* на E. Очевидно, имеется взаимно однозначное соответствие между связностями (а, следовательно, ковариантными дифференцированиями и параллельными переносами) и формами связности. Кстати, формы связности дают нам еще одно доказательство наличия аффинной структуры на множестве связностей.

Доказательство. Пусть ω_0 — какая-нибудь форма связности, а ω_1 — другая. Тогда форма $\omega_1 - \omega_0$ обнуляет все векторы пространства V_u. В силу условия 2 эта форма линейно зависит от точки слоя. Это означает, что имеется 1-форма ω на базе B со значениями в $\mathrm{End}(E)$ такая, что для всякого вектора $X \in T_uE$ выполнено равенство $\langle \omega_1 - \omega_0, d\pi(X)\rangle = \langle \omega, X\rangle(u)$ (угловые скобки в правой части равенства дают линейный оператор $E_a \to E_a$; правая часть равенства — результат действия этого оператора на точку $u \in E_a$). □

Пусть расслоение E тривиально, $e_1, \ldots, e_m$ — базисные сечения (которым соответствуют координаты $u^1, \ldots, u^m$), а на базе B введены координаты $x^1, \ldots, x^n$. Тогда на расслоении π^*E также имеются базисные сечения $\pi^*e_1, \ldots, \pi^*e_m$ (значение сечения π^*s в точке $u \in E$ равно значению сечения s в точке $a = \pi(u)$). Тогда условие 1 означает, что форма ω имеет вид $\omega(x,u) = \sum_{j=1}^m du^j \pi^*e_j + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \nu_l^k(x,u) dx^l \pi^* e_k$, а условие 2 означает, что $\nu_l^k(x,u)$ зависит от u линейно: $\nu_l^k(x,u) = \sum_{i=1}^m \Gamma_{il}^k(x)u^i$. Из сравнения формул очевидно, что $\Gamma_{il}^k(x)$ — те же самые символы Кристоффеля, что и раньше; иными словами, имеет место равенство $\omega(x,u) = du + \theta\cdot u$, где θ — определенная выше матрица связности.

Рассмотрим теперь вопрос о количественной мере неплоскости ковариантного дифференцирования ∇. Пусть X, Y — векторные поля на B. Квадратные скобки означают в дальнейшем коммутатор линейных операторов — в частности, векторных полей.

Предложение 2. *Отображение* $F(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ *является гомоморфизмом модулей. Отображение* $(X,Y) \mapsto F(X,Y)$ *является гомоморфизмом модулей* $\Gamma(\Lambda^2 TB) \to \Gamma(\mathrm{End}(E))$.

Доказательство. Аддитивность в обоих случаях очевидна. Умножение на функицю, первое утверждение: $\nabla_X(\nabla_Y(fs)) - \nabla_Y(\nabla_X(fs)) - \nabla_{[X,Y]}(fs) = f(\nabla_X(\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(\nabla_X(s)) - \nabla_{[X,Y]}(s)) + \nabla_X((Yf)\cdot s) - \nabla_Y((Xf)\cdot s) - ([X,Y]f)\cdot s = f([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(s)$.

Умножение на функцию, второе утверждение: $\nabla_{fX}(\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(\nabla_{fX}(s)) - \nabla_{[fX,Y]}(s) = f\nabla_X(\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(f\nabla_X(s)) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X}(s) = f([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(s) + (Yf)\nabla_X(s) - (Yf)\nabla_X(s) = f([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(s)$. Кососимметричность очевидна. □

По лемме это означает, что существует 2-форма F со значениями в $\mathrm{End}(E)$ такая, что $([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]})(s) = F(X,Y)\cdot s$. Форма F называется *формой кривизны* ковариантного дифференцирования ∇.

Пусть расслоение E тривиально, $e_1, \dots, e_m$ — базисные сечения (которым соответствуют координаты $u^1, \dots, u^m$), а на базе B введены координаты $x^1, \dots, x^n$. Пусть $\nabla(e_i) = \sum_{k=1}^m \theta_i^k(x)e_k$. Обозначим $\theta = (\theta_i^k)$ — это матрица из 1-форм.

Предложение 3. *Форма кривизны в данных координатах задается равенством (уравнение Маурера–Картана)* $F = d\theta + \theta\wedge\theta$.

Доказательство. Поскольку известно, что F — форма, достаточно вычислить значение $F(X_i, X_j)$, где $X_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ — базисные поля. Поля X_k коммутируют, поэтому $F(X_i,X_j)(e_k) = [\nabla_{X_i}, \nabla_{X_j}](e_k) = \nabla_{X_i}(\sum_{l=1}^m \theta_k^l(X_j)e_l) - \nabla_{X_j}(\sum_{l=1}^m \theta_k^l(X_i)e_l) = \nabla_{X_i}(\sum_{l=1}^m \Gamma_{kj}^l(x)e_l) - \nabla_{X_j}(\sum_{l=1}^m \Gamma_{ki}^l(x)e_l) = \sum_{l=1}^m \left(\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial x_i} - \frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial x_j}\right) + \sum_{l,s=1}^m (\Gamma_{kj}^l\Gamma_{li}^s - \Gamma_{ki}^l\Gamma_{lj}^s) = (d\theta + \theta\wedge\theta)(X_i, X_j)(e_k)$. □

Ковариантное дифференцирование $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*B\otimes E)$ можно продолжить до отображения $\nabla : \Gamma(\Lambda^k T^*B\otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{k+1}T^*B\otimes E)$ при всех $k = 0, 1, \dots$ по правилу Лейбница. Именно, пусть для некоторого k отображение ∇ уже задано. Пусть $s \in \Gamma(\Lambda^k T^*B\otimes E)$ — k-форма со значениями в E, а ν — 1-форма с вещественными значениями. Тогда $s\wedge\nu \in \Gamma(\Lambda^{k+1}T^*B\otimes E)$ и, по определению, $\nabla(s\wedge\nu) = \nabla(s)\wedge\nu + (-1)^k s\wedge d\nu$. На все остальные элементы пространства $\Gamma(\Lambda^{k+1}T^*B\otimes E)$ отображение ∇ продолжим по линейности.

Предложение 4. *Оператор* $\nabla^2 : \Gamma(E) \to \Gamma(\Lambda^2 T^*B\otimes E)$ *является гомоморфизмом модулей и умножением на форму кривизны* F.

Доказательство. Аддитивность ∇^2 очевидна. Умножение на функцию: $\nabla^2(fs) = \nabla(f\nabla(s) + df\otimes s) = f\nabla^2(s) - df\wedge\nabla(s) + df\wedge\nabla(s) = f\nabla^2(s)$. Таким образом, ∇^2 — гомоморфизм модулей. Поэтому утверждение об умножении на форму достаточно проверить локально.

В силу этого можно предположить, что расслоение тривиально, а ковариантная производная задается равенством $\nabla(u) = du + \theta\cdot u$ ($u(x)$ — вектор координат сечения, θ — матрица связности). Тогда $\nabla(\nabla(u)) = \nabla(du + \theta\cdot u) = d\theta\cdot u - \theta\wedge du + \theta\wedge du + \theta\wedge\theta\cdot u = F\cdot u$. □