ЛЕКЦИЯ 4

Гладким k-мерным распределением на многообразии M называется набор k-мерных подпространств $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_a \subset T_a M\}$, такой что $\mathcal{D}_a$ гладко зависит от точки $a \in M$. Распределение называется *интегрируемым*, если для каждой точки $a \in M$ существует k-мерное подмногообразие $N \subset M$, проходящее через a и касающееся в каждой своей точке соответствующего подпространства распределения. Подмногообразия N называются *интегральными*, а набор интегральных подмногообразий — *слоением*. Заметим, что открытое подмножество интегрального многообразия — также интегральное многообразие, так что интегрируемость распределения это локальное свойство.

Пример 1. Пусть $A \to M$ — расслоение. Рассмотрим в каждой точке $u \in A$ пространство векторов $V_u \subset T_u E$, касательных к слою. Это интегрируемое распределение; интегральные многообразия — слои расслоения.

Пример 2. Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, не имеющая критических точек. Рассмотрим в каждой точке $a \in M$ пространство $\mathrm{Ker}(df) = \{X \in T_a M : df(X)(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (Xf)(a) = 0\}$. Это интегрируемое распределение коразмерности 1; интегральные многообразия — гиперповерхности уровня функции f. Заметим, что этот пример не сводится к предыдущему, поскольку отображение $f : M \to \mathbb{R}$ даже при отсутствии у f критических точек не обязательно является локально тривиальным расслоением.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^3$ с координатами p, q, z. Зададим двумерное подпространство $\mathcal{D}_a \subset T_a M$ как множество нулей ковектора $\nu(a)$, где $\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} dz - p dq$. Получающееся распределение неинтегрируемо. Действительно, если бы оно было интегрируемо, то соответствующее двумерное слоение можно было бы, по крайней мере локально, представить как набор поверхностей уровня некоторой функции f. Это означает, что ковекторы $df(a)$ и $\nu(a)$ отличаются ненулевым множителем. Иными словами, существует функция $\varphi \neq 0$ такая, что $\nu = \varphi df$. Тогда $d\nu = d\varphi \wedge df$, и $d\nu \wedge \nu = 0$. Легко видеть, однако, что $d\nu \wedge \nu = -dp \wedge dq \wedge dz$ нигде не обращается в нуль.

Для произвольного k-мерного распределения $\mathcal{D}$ рассмотрим множество $\mathrm{Vect}(D)$ всех векторных полей в M, касающихся $\mathcal{D}$.

Предложение 1 (теорема Фробениуса). *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. *Распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо.*
2. *Множество $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ замкнуто относительно операции коммутирования векторных полей.*
3. *В некоторой окрестности U произвольной точки $a \in M$ существуют линейно независимые попарно коммутирующие векторные поля $X_1, \dots, X_k$ такие, что векторы $X_1(b), \dots, X_k(b)$ порождают подпространство $\mathcal{D}_b$ (здесь $b \in U$).*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$: Пусть $x(b,t)$ и $y(b,t)$ — интегральные траектории (потоки) векторных полей $X, Y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$, проходящие через точку $b \in U(a)$. Проведем интегральное многообразие N; тогда $x(b,t), y(b,t) \subset N$ для всякой точки $b \in N$. Из этого следует, что коммутатор потоков x и y также лежит в многообразии N. Поэтому коммутатор векторных полей $[X, Y]$ касается многообразия N, т.е. принадлежит $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$.

$2 \Longrightarrow 3$: Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координаты на многообразии M, а $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ — соответствующие векторные поля на M. Пусть $Y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ — набор векторных полей, порождающих $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ (α_i^j — функции от точки многообразия). Матрица $A = (\alpha_i^j)$ имеет размеры $n \times k$ и ранг k. Без ограничения общности можно предполагать, что ее самый левый минор размера $k \times k$ отличен от нуля. Пусть $K = (\varkappa_i^j)$ — матрица $k \times k$, обратная к этому минору. Тогда поля $Z_i = \sum_{j=1}^k \varkappa_i^j Y_i$ имеют вид $Z_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^n \mu_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Очевидно, Z_i порождают $\mathrm{Vect}(\mathcal{D})$. Коммутатор $[Z_i, Z_j]$ представляется в виде линейной комбинации Z_i: $[Z_i, Z_j] = \sum_{m=1}^k \lambda_{ij}^m Z_m = \sum_{m=1}^k \lambda_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m} + \sum_{m=1}^k \sum_{s=k+1}^n \lambda_{ij}^m \mu_m^s \frac{\partial}{\partial x_s}$. Но из определения Z_i видно, что $[Z_i, Z_j]$ не содержит полей $\frac{\partial}{\partial x_m}$ при $1 \leq m \leq k$. Тогда из предыдущей формулы следует, что $\lambda_{ij}^m = 0$, т.е., поля Z_i коммутируют.

$3 \Longrightarrow 1$: Пусть $X_1, \dots, X_k \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$ — базис из коммутирующих векторных полей, а $x_1(b,t), \dots, x_k(b,t)$ — соответствующие коммутирующие потоки. Рассмотрим вложение (локальное) $\mathbb{R}^k \to M$, заданное формулой $(t_1, \dots, t_k) \mapsto x_1(x_2(\dots x_k(a, t_k), t_{k-1}), \dots, t_1)$. Поскольку потоки коммутируют, касательное пространство к образу этого вложения в каждой точке b порождено векторами $X_1(b), \dots, X_k(b)$, т.е. совпадает с $\mathcal{D}_b$. $\square$

Обозначим $\mathcal{D}^\perp$ множество 1-форм, ядра которых в каждой точке a содержат подпространство $\mathcal{D}_a$.

Предложение 2 (теорема Фробениуса). *Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. *Распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо.*
2. *В некоторой окрестности U произвольной точки $a \in M$ существуют линейно независимые замкнутые 1-формы $\nu_1, \dots, \nu_{n-k}$ такие, что подпространство $\mathcal{D}_b$ (здесь $b \in U$) является пересечением ядер ковекторов $\nu_1(b), \dots, \nu_{n-k}(b)$.*
3. *Идеал, порожденный множеством $\mathcal{D}^\perp$ в кольце всех дифференциальных форм на M (с операцией внешнего умножения), замкнут относительно взятия внешнего дифференциала.*

Доказательство. $1 \Longrightarrow 2$: Проведем через точку $a \in M$ интегральное многообразие N. В окрестности точки a можно ввести координаты $x_1, \dots, x_n$ на многообразии M таким образом, чтобы многообразие N задавалось (локально) уравнениями $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$. Тогда формы $\nu_1 = dx_{k+1}, \dots, \nu_{n-k} = dx_n$ замкнуты и порождают $\mathcal{D}_b$ при b, лежащем в малой окрестности a.

$2 \Longrightarrow 3$: Если $\nu_1, \dots, \nu_{n-k}$ — упомянутые замкнутые формы, то любой элемент множества $\mathcal{D}^\perp$ представляется в виде $\sum_{i=1}^{n-k} f_i \nu_i$, где f_i — функции на M, а любой элемент идеала I, порожденного $\mathcal{D}^\perp$ — в виде $\omega = \sum_{i=1}^{n-k} \omega_i \wedge \nu_i$, где ω_i — формы. Теперь $d\omega = \sum_{i=1}^{n-k} d\omega_i \wedge \nu_i \in I$.

$3 \Longrightarrow 1$: Пусть $X_1, X_2 \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$, и $\nu \in \mathcal{D}^\perp$. Имеем (по формуле Картана для внешнего дифференциала формы): $\nu([X_1, X_2]) = X_1 \nu(X_2) - X_2 \nu(X_1) - d\nu(X_1, X_2)$. Но $\nu \in \mathcal{D}^\perp$, откуда $\nu(X_1) = \nu(X_2) \equiv 0$. Согласно предположению 3 $d\nu = \sum_k \alpha_k \wedge \nu_k$, $\nu_k \in \mathcal{D}^\perp$, откуда $d\nu(X_1, X_2) \equiv 0$. Следовательно, $\nu([X_1, X_2]) = 0$, и, в силу произвольности формы ν заключаем, что $[X_1, X_2] \in \mathrm{Vect}(\mathcal{D})$. Из предложения 1 вытекает, что распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо. □

В качестве приложения теорем Фробениуса докажем критерий плоскости связности.

Предложение 3. *Ковариантное дифференцирование является плоским тогда и только тогда, когда его кривизна равна нулю.*

Доказательство. Если ковариантное дифференцирование плоское, то $F(X, Y) = 0$ для любых коммутирующих полей. В частности, это так для базисных полей $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Отсюда следует, что $F = 0$. Обратное утверждение очевидно. □

Предложение 4. *Ковариантное дифференцирование, соответствующее связности (распределению горизонтальных подпространств $H_u \subset T_u E$) является плоским тогда и только тогда, когда связность интегрируема.*

Доказательство. Пусть распределение H_u интегрируемо. Его n-мерные интегральные многообразия R_u (многообразие R_u проходит через точку $u \in E$) трансверсальны к слоям, и поэтому являются графиками некоторых сечений s_u. Очевидно, $s_u(a) = u$ (где $a = \pi(u)$) и $\nabla(s_u) \equiv 0$ в некоторой *окрестности* точки a. Если точки $u_1, \dots, u_m$ образуют базис слоя E_a, то $e_1 = s_{u_1}, \dots, e_m = s_{u_m}$ образуют базис всех достаточно близких к E_a слоев. Для такого базиса сечений $\theta_i^k = 0$, откуда следует, что кривизна равна 0 и в силу предложения 3 ковариантное дифференцирование плоское.

Для доказательства обратного утверждения предположим (это можно сделать в силу локальности задачи), что расслоение тривиально, так что имеется матрица связности $\theta = (\theta_i^k)$. Подпространство H_u это множество нулей 1-формы $\omega = du + \theta \cdot u$ (со значениями в E). Имеем: $d\omega = d\theta \cdot u - \theta \wedge du = -\theta \wedge \theta \cdot u - \theta \wedge du = -\theta \wedge \omega$. Интегрируемость распределения H_u следует теперь из теоремы Фробениуса. □