ЛЕКЦИЯ 5

В данной лекции мы рассмотрим случай комплексного линейного расслоения, т.е. расслоения $E \to B$ с одномерным слоем $F = \mathbb{C}$ и структурной группой $\mathrm{GL}(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Пусть ∇ — связность (ковариантное дифференцирование) на E, а $F \in \Gamma(\Lambda^2 T^*B \otimes \mathrm{End}(E))$ — кривизна этой связности.

Лемма. *Расслоение* $\mathrm{End}(E))$ *одномерно и тривиально.*

Доказательство. Размерность слоя $\mathrm{End}(E)$ равна квадрату размерности слоя E, т.е. 1. Одномерное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда обладает нигде не обращающимся в нуль сечением. В случае $\mathrm{End}(E)$ такое сечение имеется: его значение в точке $a \in B$ это тождественное отображение слоя E_a в себя. $\square$

Следовательно, кривизну F можно воспринимать просто как 2-форму на базе B расслоения.

Предложение 1. *Кривизна F является замкнутой 2-формой: $dF = 0$. Если F' — кривизна какой-либо иной связности ∇' на том же расслоении E, то форма $F - F'$ точная.*

Доказательство. Первое утверждение локально, поэтому при его доказательстве можно считать, что расслоение E тривиально, и θ — форма связности ∇ (т.е. матрица 1×1 из 1-форм). Поскольку $\theta \wedge \theta = 0$, имеем по формуле Картана $F = d\theta$, откуда $dF = 0$.

Из формулы Лейбница (входящей в определение ковариантного дифференцирования) следует, что $[\nabla_X, f] = Xf$. Здесь под f понимается оператор умножения сечений расслоения E на функцию $f \in C^\infty(B)$ (соответственно, Xf — оператор умножения на Xf), X — векторное поле на B. Поскольку расслоение E — линейное, в силу леммы и теоремы об аффинной структуре заключаем , что на базе B существует 1-форма ν такая, что $\nabla_0 = \nabla + \nu$. Тогда по определению $F'(X,Y) = [\nabla'_X, \nabla'_Y] - \nabla'_{[X,Y]} = F(X,Y) + X\nu(Y) - Y\nu(X) - \nu([X,Y]) = F(X,Y) + d\nu(X,Y)$. $\square$

Тем самым, все формы связностей на линейном расслоении определяют один и тот же класс $c_1(E) \in H^2_{DR}(B)$ в двумерных когомологиях де Рама базы. Он называется классом Эйлера (или первым классом Черна) расслоения E.

Пусть U_i — набор окрестностей, покрывающих базу B и таких, что над каждой из них расслоение E тривиально; пусть $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$ — соответствующие функции перехода. Рассмотрим разбиение единицы ϱ_i, подчиненное покрытию U_i, и определим на каждой окрестности U_i 1-форму $\theta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_j \varrho_j \frac{dg_{ji}}{g_{ji}}$. Этот набор 1-форм задает связность: действительно, поскольку на пересечении $U_i \cap U_j \cap U_k$ выполнено равенство $g_{ji} = g_{jk}/g_{ki}$, то получаем, что $\theta_i = \sum_j \varrho_j \frac{dg_{ji}}{g_{ji}} = \sum_j \varrho_j \left(\frac{dg_{jk}}{g_{jk}} - \frac{dg_{ki}}{g_{ki}}\right) = \theta_k - \frac{dg_{ki}}{g_{ki}}$, как и требуется (заметим, что умножение в $\mathbb{C}^*$ коммутативно, поэтому $g_{ki}\theta_k g_{ki}^{-1} = \theta_k$). Тем самым получается, что класс Эйлера это класс, соответствующий 2-форме F, заданной над окрестностью U_i формулой $F = \sum_j \frac{d\varrho_j \wedge dg_{ij}}{g_{ji}}$.

Пусть теперь база расслоения B двумерна и ориентирована. Пусть $s : B \to E$ — сечение расслоения, $s(a) = 0$, и в некоторой окрестности U точки a сечение s других нулей не имеет (изолированный нуль). Без ограничения общности можно предположить, что над U расслоение тривиально; пусть $\varphi_x : E_x \to \mathbb{C}$, $x \in U$ — соответствующая тривиализация. Рассмотрим простую замкнутую кривую $\gamma \subset U$, охватывающую точку a один раз в положительном направлении. Тогда $s(x) \neq 0$ при $x \in \gamma$ и, тем самым, определено отображение $\varphi_{s(x)}/\left|\varphi_{s(x)}\right| : \gamma = S^1 \to S^1 \subset \mathbb{C}$. Его степень называется порядком нуля a. Нетрудно проверить, что порядок нуля определен корректно, т.е. не зависит от выбора кривой γ и тривиализации φ.

Предложение 2. *Пусть $E \to B$ — комплексное линейное расслоение над ориентированной компактной базой, и пусть $s : B \to E$ — его сечение, все нули которого изолированы. Пусть F — кривизна какой-либо связности на расслоении E. Тогда $\int_B F$ (т.е. значение класса Эйлера на фундаментальном классе многообразия B) равен сумме индексов всех нулей сечения s, умноженной на $2\pi i$.*

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_N$ — нули сечения s (их конечное число в силу изолированности и компактности базы B), $k_1, \dots, k_N$ — их индексы. Зафиксируем непересекающиеся окрестности $U_1, \dots, U_N$ точек $a_1, \dots, a_N$, над которыми расслоение тривиально. Обозначим $U_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} B \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$. Над множеством U_0 расслоение E обладает не обращающимся в нуль сечением s, и потому тоже тривиально. Следовательно, $U_0, U_1, \dots, U_N$ — покрытие B “тривиализующими” окрестностями. Для этого покрытия непустыми являются все пересечения $U_0 \cap U_i = U_i \setminus \{a_i\}$, а остальные конечные пересечения пусты. Определены функции перехода $g_{0i} : U_0 \cap U_i = U_i \setminus \{a_i\} \to \mathbb{C}^*$; индекс g_{0i} (в очевидном смысле) равен k_i.

Определим на E связность ∇ по рецепту, приведенному выше. В силу предложения 1 величина $\int_B F$ не зависит от того, кривизна какой именно связности рассматривается, так что можно считать, что F — кривизна ∇. F отлична от 0 только в множествах U_t. Имеем: $\int_B F = \sum_t \int_{U_t} F = \sum_t \int_{U_t} d\left(\varrho_t \frac{dg_{0t}}{g_{0t}}\right) = \sum_t \int_{\partial U_t} \frac{dg_{0t}}{g_{0t}} = 2\pi i \sum_t k_t$; в предпоследнем равенстве использовано то, что $\varrho_t|_{\partial U_t} \equiv 1$. □

Следствие. *Если E — касательное расслоение к B (наделенное произвольной комплексной структурой), то $\int_B F = \chi(B)$.*

Предложение 3. *Пусть $E \to S^2$ — линейное комплексное расслоение. Тогда значение класса Эйлера на фундаментальном классе базы равно $2\pi i$, умноженному на стандартный целочисленный инвариант таких расслоений.*

Доказательство. Покроем S^2 двумя окрестностями, пересекающимися по небольшому кольцу A, содержащему экватор. Пусть $g : A \to \mathbb{C}^*$ — функция перехода. Рассуждая так же, как в предложении 2, получаем, что искомое значение равно $\int_{\partial A} \frac{dg}{g} = 2\pi i \times \mathrm{ind}(g)$. □

Многомерный аналог предложения 2 требует некоторых предположений о сечении s. А именно, назовем сечение s регулярным, если оно пересекается с нулевым сечением трансверсально, т.е. в произвольной точке a такой, что $s(a) = 0$, подпространства $H_0 \subset T_{(a,0)}E$ и $H_s \subset T_{(a,0)}E$, касательные к графикам этих сечений, пересекаются по подпространству H вещественной коразмерности 2. В этом случае по теореме о неявной функции множество Z_s нулей сечения s — многообразие, а подпространство H является касательным к Z_s.

Пространства H_0, H_s и $T_{(a,0)}E$ ориентированы; это позволяет приписать пересечению знак. А именно, выберем в H произвольный базис и дополним его до положительно ориентированного базиса в H_0 и в H_s. Вместе все выписанные векторы образуют базис пространства $T_{(a,0)}E$. Припишем точке $a \in Z_s$ знак $+1$, если этот базис положительно ориентирован (т.е. задает в $T_{(a,0)}E$ ориентацию, совпадающую с имевшейся ранее), и -1 в противном случае. Очевидно, что знак не изменяется, когда точка $a \in Z_s$ меняется непрерывно. Тем самым, знак приписан каждой компоненте связности многообразия $Z_s \subset B$; иными словами, определен цикл $Z_s \in H_{n-2}(B, \mathbb{Z})$.

Предложение 4. *Пусть база B линейного комплексного расслоения $E \to B$ компактна и ориентирована. Тогда класс Эйлера $c_1(E)$ является двойственным по Пуанкаре к циклу Z_s для произвольного регулярного сечения s.*

Мы не будем приводить доказательство предложения 4; отметим только, что оно опирается на ту же конструкцию связности по функциям перехода, что и доказательства предложений 2 и 3.