ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И РАССЛОЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 6

Рассмотрим связность на касательном расслоении $TB \to B$. Операция взятия ковариантной производной сопоставляет паре векторных полей Y, Z векторное поле $\nabla_Y(Z)$.

Предложение 1. *Отображение* $\mathcal{T}(Y,Z) \stackrel{def}{=} \nabla_Y(Z) - \nabla_Z(Y) - [Y,Z]$ *является гомоморфизмом модулей* $\Gamma(\Lambda^2 TB) \to \Gamma(TB)$.

Доказательство. Стандартная проверка: линейность над $\mathbb{R}$ и косая симметрия очевидны. Линейность над кольцом функций: $\mathcal{T}(fY,Z) = \nabla_{fY}(Z) - \nabla_Z(fY) - [fY,Z] = f\nabla_Y(Z) - f\nabla_Z(Y) - (Zf)Y - f[Y,Z] + (Zf)Y = f\mathcal{T}(Y,Z)$. □

Стандартным образом из предложения 1 следует, что существует тензор $T \in \Gamma(T^*B \otimes \Lambda^2 TB)$ такой, что $\mathcal{T}(Y,Z) = \langle T, Y \wedge Z\rangle$ (напомним, что тензорами называются сечения расслоений $TB\otimes\dots\otimes TB\otimes T^*B\otimes\dots\otimes T^*B$, и их подрасслоений — например, косых степеней). Тензор T называется кручением связности.

Тривиализацию касательного расслоения обычно выбирают согласованной с системой координат на базе: если $x^1,\dots,x^n$ — координаты, то базис в $\Gamma(TB)$ составляют векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}$. Если выбрана такая тривиализация, то ковариантная производная векторного поля $Z = \sum_{i=1}^n z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ вдоль векторного поля $Y = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ есть $\nabla_Y(Z) = \sum_{i,j=1}^n y^i \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k y^i z^j \frac{\partial}{\partial x^k}$. Отсюда следует, что координаты тензора кручения (в базисе $\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^k$) равны $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$.

Пусть теперь на B введена риманова метрика g. Связность на TB называется связностью Леви–Чивита, если она имеет нулевое кручение и согласована с метрикой. Последнее требование означает, что все параллельные переносы $P_\gamma : T_{\gamma(0)}B \to T_{\gamma(1)}B$ являются ортогональными отображениями.

Лемма 1. *Условие согласованности связности ∇ с римановой метрикой g равносильно равенству $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z(X),Y) + g(X,\nabla_Z(Y))$ для трех произвольных векторных полей X,Y,Z. Если F — кривизна связности ∇, то для произвольных векторов X,Y оператор $F(X,Y) : T_aB \to T_aB$ принадлежит алгебре Ли $\mathfrak{so}(T_aB, g_a)$ (кососимметричен по отношению к скалярному произведению g_a).*

Доказательство — упражнение.

Предложение 2. *Для каждого риманова многообразия существует единственная связность Леви–Чивита.*

Доказательство. Пусть X_1, X_2, X_3 — произвольные векторные поля на B. Из леммы получаем, что $g(\nabla_{X_k}(X_j),X_i) + g(\nabla_{X_k}(X_i),X_j) = X_k g(X_i,X_j)$, где i,j,k — числа $1,2,3$ в любом порядке (всего 3 соотношения в силу симметрии скалярного произведения g). Из условия отсутствия кручения следует, что $g(\nabla_{X_k}(X_j),X_i) - g(\nabla_{X_j}(X_k),X_i) = g([X_k,X_j],X_i)$ — еще 3 соотношения. Из всех 6 соотношений получаем, что $g(\nabla_{X_1}(X_2),X_3) = \frac{1}{2}\Big(X_1 g(X_3,X_2) - X_3 g(X_2,X_1) + X_2 g(X_3,X_1) - g([X_2,X_1],X_3) + g([X_3,X_1],X_2) + g([X_3,X_2],X_1)\Big)$. В силу невырожденности скалярного произведения это соотношение полностью определяет величину $\nabla_{X_1}(X_2)$. Правило Лейбница и равенство $\nabla_{fX_1}(X_2) = f\nabla_{X_1}(X_2)$ устанавливаются непосредственной проверкой. □

Из полученной явной формулы для связности Леви–Чивита получаются и ее символы Кристоффеля в стандартном базисе: $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^n (g^{-1})^{ks}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$.

Следствие. *Пусть $B' \subset B$ — подмногообразие риманова многообразия B, и ∇ — связность Леви–Чивита на TB. Рассмотрим связность ∇' на TB', которая задается формулой $\nabla'_X(Y)(a) = P_a \nabla_X(Y)(a)$, где $a \in B'$, X,Y — векторные поля на B', а $P_a : T_aB \to T_aB'$ — ортогональная проекция. Тогда ∇' — связность Леви–Чивита на B'.*

Доказательство. Выберем координаты $x^1,\dots,x^n$ в окрестности точки a так, чтобы $x^1,\dots,x^m$ были бы координатами на B', а векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial}{\partial x_j}$ при $i \le m, j > m$ были бы ортогональны. В таких координатах матрица $(g^{-1})^{ij}$ имеет блочно-диагональный вид с блоками размерности m и $n-m$. Утверждение следстви теперь получается из вышеприведенной явной формулы для связности Леви–Чивита. □

Связность Леви–Чивита позволяет разрешить вопрос о существовании евклидовых координат:

Предложение 3. *На римановом многообразии B тогда и только тогда существуют (локально) координаты $x^1,\dots,x^n$, в которых риманова метрика имеет вид $(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$, когда кривизна связности Леви–Чивита равна нулю.*

Доказательство. Если метрика в координатах $x^1, \dots, x^n$ равна сумме квадратов, то символы Кристоффеля связности Леви–Чивита нулевые, и ее кривизна равна нулю.

Обратно, пусть кривизна связности Леви–Чивита равна нулю. Тогда существуют (локально) набор ковариантно постоянных векторных полей $Y_1, \dots, Y_n$. Поскольку кручение равно нулю, $[Y_i, Y_j] = \nabla_{Y_i}(Y_j) - \nabla_{Y_j}(Y_i) = 0$, откуда следует, что на B найдется система координат $y^1, \dots, y^n$, такая что $Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$, $i = 1, \dots, n$. В этих координатах символы Кристоффеля равны нулю (поскольку поля ковариантно постоянные). Таким образом, $\frac{\partial g_{kj}}{\partial y^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = 0$ для любой тройки i, j, k. Переставляя индексы по циклу, получим $\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial y^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^i} = 0$. Сложение этих равенств (с учетом симметрии матрицы g_{ij}) дает $\frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} = 0$. Таким образом, коэффициенты римановой метрики постоянны, а, следовательно, нужную систему координат $x^1, \dots, x^n$ можно получить из $y^1, \dots, y^n$ линейным преобразованием. $\square$

Предложение 4. *Кривая $\gamma(t)$ на римановом многообразии B является геодезической, проходимой с постоянной скоростью, тогда и только тогда, когда кривая в TB, заданная формулой $(\gamma(t), \dot\gamma(t))$ является ковариантно постоянным подъемом γ по отношению к связности Леви–Чивита. В локальных координатах геодезические $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ это кривые, удовлетворяющие системе уравнений 2 порядка $\sum_{i=1}^n g_{ik}\ddot x^i = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right)\dot x^i \dot x^j$, $k = 1, \dots, n$.*

Второе утверждение следует из первого и явной формулы для связности Леви–Чивита. Для доказательства первого утверждения требуется экскурс в нелинейный функциональный анализ (вариационное исчисление), от которого мы воздержимся.

Следствие. *Для любой точки $(a, X) \in TB$ (здесь $X \in T_aB$) существует и локально единственна геодезическая γ, такая что $\gamma(0) = a$, $\dot\gamma(0) = X$.*

Иными словами, на тотальном пространстве касательного расслоения к риманову многообразию определено векторное поле (*геодезический поток*), для которого кривые $(\gamma, \dot\gamma)$ (γ — геодезическая, проходимая с постоянной скоростью) являются интегральными.

Пример. Пусть B — ориентированное двумерное многообразие, $\gamma \subset B$ — геодезическая. При параллельном переносе вдоль γ (по отношению к связности Леви–Чивита) вектор $\dot\gamma(0)$ переходит в $\dot\gamma(1)$. Поскольку связность Леви–Чивита согласована с римановой метрикой, имеют место равенства $g(v, v) = g(P_\gamma(v), P_\gamma(v))$ и $g(v, \dot\gamma(0)) = g(P_\gamma(v), \dot\gamma(1))$, где v — произвольный вектор из $T_{\gamma(0)}B$. Таким образом, при параллельном переносе вдоль геодезической сохраняется длина вектора и его угол с касательной. Нетрудно видеть, что это в точности операция, описанная в лекции 1. По лемме 1 значение кривизны F связности Леви–Чивита на паре векторов $X, Y \in T_aB$ принадлежит $\mathfrak{so}(T_aB, g_a)$. Пространство T_aB двумерно, поэтому алгебра Ли $\mathfrak{so}(T_aB, g_a)$ одномерна и состоит из кратных выделенного элемента j — поворота на $\pi/2$ (относительно g_a) в положительном направлении (ориентация фиксирована !). Нетрудно видеть, что $F(X, Y) = r(X, Y)j$, где r — 2-форма, определенная в лекции 1.