ЛЕКЦИЯ 7

Определение. Симплектической структурой на многообразии B называется замкнутая невырожденная 2-форма ω.

Невырожденность ω означает невырожденность порожденных ею билинейных кососимметрических форм на T_aB: если для некоторого вектора $X \in T_a$ и всех векторов $Y \in T_aB$ выполнено равенство $\omega(a)(X,Y) = 0$, то $X = 0$.

Предложение 1. *Если на многообразии B имеется симплектическая структура, то оно ориентируема и его размерность четна. Невырожденность 2-формы ω на $2n$-мерном многообразии B эквивалентна тому, что $2n$-форма ω^n (косая степень) нигде не обращается в нуль.*

Доказательство. На нечетномерном линейном пространстве $V = T_aB$ не может существовать невырожденное кососкалярное произведение. Действительно, если $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение, то кососкалярное обязательно выражается формулой $\omega(x,y) = (Ax,y)$, где $A : V \to V$ — кососимметрический оператор. Но тогда A вырожден: $\det A = \det A^* = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det A = -\det A = 0$. Значит, $\dim B = 2n$. Последнее утверждение следует из теоремы Грама: число $\omega^n(a)$ равно квадрату определителя оператора A (в тех же обозначениях, что и выше). Нигде не обращающаяся в нуль форма старшей размерности ω^n задает ориентацию многообразия B — получено и второе утверждение. $\square$

Пример 1. $B = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n$ и формой $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$.

Пример 2. B — произвольное ориентированное двумерное многообразие, ω — произвольная невырожденная 2-форма (форма площади).

Пример 3. $B = T^*M$, где M — произвольное многообразие. На B имеется выделенная 1-форма ν, значение которой в точке $\varphi \in T_a^*M$ на векторе $X \in T_\varphi B$ равно $\varphi(\pi X)$, где $\pi : T_\varphi B \to T_aM$ — естественная проекция. 2-форма $\omega = d\nu$ задает на B симплектическую структуру. Замкнутость очевидна; для проверки невырожденности проще всего записать форму ω в координатах (невырожденность это локальное свойство, так что это можно сделать). Координаты $q_1,\ldots,q_n$ на M порождают базис $dq_1,\ldots,dq_n$ в каждом слое T_a^*M. Следовательно, на $B = T^*M$ имеется система координат $p_1,\ldots,p_n,q_1,\ldots,q_n$, где q_i — как раньше, а p_i — координаты ковектора в этом базисе. Тогда ν имеет в этих координатах вид $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$, а ω — вид $\sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, и, следовательно, невырождена.

В примере 3 симплектическая форма является точной. Оказывается, так может быть только на некомпактных многообразиях.

Предложение 2. *Пусть B — компактное $2n$-мерное многообразие с симплектической формой ω. Тогда все внешние степени ω^k, $k = 1,\ldots,n$ замкнуты и не точны (т.е. представляют ненулевые классы когомологий де Рама).*

Доказательство. Очевидно, $d\omega^k = d(\omega \wedge \omega^{k-1}) = d\omega \wedge \omega^{k-1} + \omega \wedge d\omega^{k-1} = 0$ по индукции по k. Пусть теперь $\omega^k = d\alpha$. Тогда $\omega^n = \omega^k \wedge \omega^{n-k} = d(\alpha \wedge \omega^{n-k})$. Но тогда $\int_B \omega^n = 0$, что противоречит тому, что ω^n, согласно предложению 1, нигде не обращается в нуль. $\square$

Пример 3 является обобщением примера 1. Дальнейшим обобщением является

Предложение 3 (теорема Дарбу). *Форма ω на $2n$-мерном многообразии B тогда и только тогда является симплектической, когда для всякой точки $a \in B$ найдется окрестность $U \ni a$ и в ней координаты $x^1,\ldots,x^{2n}$, для которых $\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$.*

Доказательство. Если нужные координаты найдутся, то форма ω, очевидно, замкнутая и невырожденная. При доказательстве обратного утверждения, ввиду его локального характера, можно считать, что B — область в $\mathbb{R}^{2n}$, и $\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$. Утверждение теоремы Дарбу теперь можно переформулировать так: существует окрестность $U \ni a$ и в ней диффеоморфизм $D : U \to U$, такой что $D^*\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$.

По известной теореме линейной алгебры любая невырожденная кососимметрическая форма на линейном пространстве имеет вид $\sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$ в некоторых координатах. Поэтому достаточно найти диффеоморфизм D, для которого $D^*\omega$ будет иметь постоянные коэффициенты; например, $D^*\omega = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}(a) dx^i \wedge$

$dx^j \stackrel{\rm def}{=} \omega_1$. Если взять окрестность U достаточно маленькой, то все формы $\omega_t = t\omega_1 + (1-t)\omega$ будут симплектическими структурами. Мы построим семейство диффеоморфизмов D_t таких, что $D_t^*\omega = \omega_t$, и возьмем $D \stackrel{\rm def}{=} D_1$.

Формы ω_t замкнуты; уменьшая, при необходимости, окрестность U, можно считать их точными: $\omega_t = d\nu_t$. Формы ω_t невырождены; поэтому для каждого t существует векторное поле X_t такое, что $\omega_t(X_t, Y) = \left(\frac{d}{dt}\nu_t\right)(Y)$ для произвольного векторного поля Y — иными словами, $\iota_{X_t}\omega = \frac{d}{dt}\nu_t$. Возьмем в качестве D_t семейство диффеоморфизмов, для которого $\frac{d}{dt}D_t = X_t$. Тогда $\frac{d}{dt}D_t^*\omega = X_t\omega = (d\iota_{X_t} + \iota_{X_t}d)\omega = d\frac{d}{dt}\nu_t = \frac{d}{dt}\omega_t$. Поскольку $D_0^*\omega = \omega = \omega_0$, получаем равенство $D_t^*\omega = \omega_t$ для всех t. □

Иными словами, доказано, что всякие два симплектических многообразия одной и той же размерности локально симплектоморфны (найдется диффеоморфизм между ними, переводящий одну симплектическую структуру в другую) — для симплектических многообразий нет локальных инвариантов, в отличие от многообразий римановых, где есть, например, кривизна.

Определение. Отображение $C^\infty(B) \times C^\infty(B) \to C^\infty(B)$ (обозначаемое $f, g \mapsto \{f, g\}$) называется пуассоновой скобкой, если

1. Оно определяет на $C^\infty(B)$ структуру алгебры Ли, т.е.
   (a) Билинейно над $\mathbb{R}$: $\{f+g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$, и $\{cf, g\} = c\{f, g\}$, где $c = const$.
   (b) Кососимметрично: $\{g, f\} = -\{f, g\}$.
   (c) Удовлетворяет тождеству Якоби: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.
2. Оно удовлетворяет тождеству Лейбница: $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

Всякую билинейную форму A на пространстве V можно интерпретировать как оператор $\mathcal{A} : V \to V^*$, действующий по правилу $\mathcal{A}(v_1)(v_2) = A(v_1, v_2)$. При этом косая симметрия A соответствует тому, что $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$, невырожденность — обратимости $\mathcal{A}$. Симплектическая форма, таким образом, может быть интерпретирована, как обратимое сечение $\xi \in \Gamma(\mathrm{Hom}(T^*B, TB))$: по определению, имеет место равенство $\omega(\xi\nu, X) = \nu(X)$ для любого векторного поля X и 1-формы ν. Векторные поля вида ξdf, где $f \in C^\infty(B)$, называются гамильтоновыми.

Предложение 4. *Операция $\{f, g\} \stackrel{def}{=} (\xi dg)f = \langle df, \xi dg\rangle = \omega(\xi df, \xi dg)$ является пуассоновой скобкой, а отображение $f \mapsto \xi df$ — гомоморфизмом алгебр Ли (слева — алгебра Ли функций с операцией пуассоновой скобки, а справа — алгебра Ли векторных полей с операцией коммутирования). Гамильтоновы векторные поля образуют подалгебру алгебры Ли всех векторных полей.*

Доказательство. Операция $\{f, g\}$, очевидно, билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Лейбница. Для доказательства тождества Якоби докажем сначала, что отображение $f \mapsto \xi df$ — гомоморфизм (мы не знаем еще, что это гомоморфизм алгебр Ли, но для доказательства это не требуется). Иными словами, нужно доказать, что $\xi d\{f, g\} = [\xi df, \xi dg]$ для произвольных функций f и g. Пусть X — произвольное векторное поле. По формуле Картана для дифференциала формы имеем: $0 = (d\omega)(\xi df, \xi dg, X) = -(\xi df)\omega(\xi dg, X) + (\xi dg)\omega(\xi df, X) - X\omega(\xi df, \xi dg) + \omega([\xi df, \xi dg], X) - \omega([\xi df, X], \xi dg) + \omega([\xi dg, X], \xi df) = -(\xi df)Xg + (\xi dg)Xf - X\{f, g\} + \omega([\xi df, \xi dg], X) - [\xi df, X]g + [\xi dg, X]f = \omega([\xi df, \xi dg], X) - X\{f, g\} + X\{f, g\} - X\{f, g\} = \omega([\xi df, \xi dg], X) - \omega(\xi d\{f, g\}, X)$. В силу произвольности X и невырожденности ω получаем требуемое. Заодно доказано, что множество гамильтоновых векторных полей замкнуто относительно коммутирования, т.е. является подалгеброй Ли алгебры всех векторных полей.

Теперь несложно доказать тождество Якоби: пусть h — произвольная функция, тогда $[\xi df, \xi dg]h = (\xi d\{f, g\})h = \{\{f, g\}, h\}$. С другой стороны, $[\xi df, \xi dg]h = \xi df \xi dg h - \xi dg \xi df h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}$. Сравнивая два этих выражения и пользуясь кососимметричностью, получим тождество Якоби. □

Заметим, что ядро гомоморфизма $f \mapsto \xi df$ состоит из констант, т.е. одномерно, и все элементы ядра имеют нулевую скобку Пуассона со всеми функциями (как говорят, центральны). В этой ситуации говорят, что алгебра Ли функций (с операцией пуассоновой скобки) является одномерным центральным расширением алгебры Ли гамильтоновых векторных полей.