ЛЕКЦИЯ 8

Продолжим изучение пуассоновых скобок, порожденных симплектическими формами. Напомним, что в этом случае $\{f,g\} \stackrel{\text{def}}{=} (\xi df)g$, где $\xi : T^*B \to TB$ — оператор, соответствующий невырожденной билинейной форме ω.

Очевидно, что поток D_t векторного поля X сохраняет тензор T (т.е. $D_t^*T = T$) тогда и только тогда, когда производная Ли тензора T вдоль поля X равна нулю. Иногда в этом случае говорят, что поле X сохраняет тензор T.

Предложение 1. 1. *Множество векторных полей, сохраняющих симплектическую форму ω, состоит из локально гамильтоновых векторных полей, т.е. полей вида $\xi\alpha$, где α — замкнутая 1-форма.*

2. *Векторное поле ξdf сохраняет функцию H тогда и только тогда, когда $\{f,H\} = 0$.*

Доказательство. 1. $(\xi\alpha)\omega = \iota_{\xi\alpha} d\omega + d\iota_{\xi\alpha}\omega = d\alpha$.

2. $(\xi df)H = \{f,H\}$.

□

Рассмотрим теперь пуассоновы скобки общего вида (в отсутствие симплектической структуры).

Пример 1 (скобка Ли–Березина–Кириллова). Пусть $B = \mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ — некоторая алгебра Ли Как многообразие B — линейное пространство, и поэтому для всякой точки $a \in B$ пространство T_aB можно отождествить с B, а пространство T_a^*B — с $B^* = \mathfrak{g}$. Определим $\{f,g\}$ как функцию, равную нулю в нуле и такую, что $d\{f,g\} = [df, dg]$ (в правой части скобки означают операцию — коммутатор — в алгебре Ли $\mathfrak{g}$). Нетрудно видеть, что это всегда — пуассонова скобка.

Предложение 2. *Для каждой пуассоновой скобки существует (и единствен) тензор $\xi \in \Gamma(\Lambda^2 TB) \subset \Gamma(\mathrm{Hom}(T^*B, TB))$ такой, что $\{f,g\} = (\xi df)g = \langle dg, \xi df\rangle$. Отображение $f \mapsto \xi df$ является гомоморфизмом алгебры Ли функций (с операцией пуассоновой скобки) в алгебру Ли векторных полей.*

Доказательство. Положим сначала $f \equiv 1$. Из тождества Лейбница: $\{1,g\} = \{1\cdot 1, g\} = \{1,g\} + \{1,g\}$, т.е. $\{1,g\} = 0$ для всякой функции g. Из линейности следует, что тем же свойством обладают все функции $f = const$.

Утверждение о существовании тензора ξ эквивалентно тому, что если $df(a) = 0$, то $\{f,g\}(a) = 0$ независимо от функции g. Согласно предыдущему абзацу $\{f,g\} = \{f - f(a), g\}$, так что можно считать, что $f(a) = 0$. По лемме Адамара существуют функции f_1, f_2 такие, что $f_1(a) = f_2(a) = 0$, $f = f_1f_2$. По тождеству Лейбница $\{f,g\}(a) = f_1(a)\{f_2,g\}(a) + f_2(a)\{f_1,g\}(a) = 0$. Из косой симметрии пуассоновой скобки следует, что оператор ξ кососимметричен, т.е. принадлежит $\Gamma(\Lambda^2 TB) \subset \Gamma(TB \otimes TB) = \Gamma(\mathrm{Hom}(T^*B, TB))$.

Утверждение о гомоморфизме следует из тождества Якоби. Действительно, для произвольной функции h имеем: $[\xi df, \xi dg]h = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} = \{\{f,g\},h\} = (\xi d\{f,g\})h$. □

В отличие от симплектической ситуации оператор ξ не обязан быть невырожденным. Он не обязан также иметь постоянный ранг; понятно, однако, что точки, где его ранг максимален (и равен некоторому числу $m \le n = \dim B$) образуют в B открытое подмножество U. На этом подмножестве подпространства $\mathcal{D}_a \stackrel{\text{def}}{=} \xi(T_a^*B) \subset T_aB$ образуют m-мерное распределение.

Предложение 3. *Распределение $\mathcal{D}$ интегрируемо. На его интегральных многообразиях (называемых симплектическими листами пуассоновой скобки $\{\cdot,\cdot\}$) тензор ξ определяет пуассонову скобку, которая порождена некоторой симплектической структурой (своей для каждого листа).*

Доказательство. Подпространство $\mathcal{D}_a$ порождено векторами вида $\xi dx^i(a)$, где $x^1, \dots, x^n$ — какие-нибудь координаты на B. Ковектор $d\{x^i, x^j\}(a)$ является линейной комбинацией ковекторов $dx^i(a)$. Из равенства $[\xi dx^i, \xi dx^j] = \xi d\{x^i, x^j\}$ и теоремы Фробениуса вытекает интегрируемость распределения $\mathcal{D}$.

Пусть X, Y — векторы, касающиеся симплектического листа S. Определим 2-форму ω на S равенством $\omega(X,Y) = \langle \xi^{-1}(X), Y\rangle$; при этом, очевидно, неважно, какой именно элемент прообраза $\xi^{-1}(X)$ мы возьмем. Ясно, что эта 2-форма невырождена. Замкнутость доказывается обращением рассуждений, приведенных в доказательстве предложения 3 лекции 7. □

Пусть теперь B — риманово многообразие с римановой метрикой g. В этом случае на на многообразии TB определено векторное поле X, интегральными кривыми которого являются кривые $(\gamma(t), \dot\gamma(t))$, где $\gamma \subset B$ — геодезическая на многообразии B (проходимая с постоянной скоростью). Риманова метрика порождает послойно линейный диффеоморфизм $\Phi : T^*B \to TB$. Рассмотрим на многообразии T^*B функцию H, заданную равенством $H(\nu) = g(\Phi\nu, \Phi\nu)$ (квадрат длины ковектора, полученный отождествлением TB и T^*B посредством Φ).

Предложение 4. *Векторное поле $\Phi_*^{-1}X$ (на T^*B) равно ξdH, где $\xi : \Gamma(T^*T^*B) \to \Gamma(TT^*B)$ — оператор, соответствующий стандартной симплектической структуре на T^*B.*

Доказательство. Утверждение носит локальный характер, поэтому можно считать, что на многообразии B введена система координат $x^1, \dots, x^n$. Это позволяет ввести на $2n$-мерном многообразии TB координаты $x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^n$, где $\xi^i(v)$ — коэффициент при $\frac{\partial}{\partial x_i}$ в разложении вектора v по базису $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ (в точке приложения вектора v). Аналогично можно ввести координаты $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ на многообразии T^*B — здесь $q_i = x^i$, а p_i — коэффициент при dq_i в разложении ковектора ν по базису $dq_1, \dots, dq_n$.

Во введенных координатах функция H равна $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (g^{-1})^{ij} p_i p_j$; отсюда $dH = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial (g^{-1})^{ij}}{\partial q_k} p_i p_j\, dq_k + \sum_{i,k=1}^n (g^{-1})^{ik} p_i\, dp_k$. Оператор ξ задается формулами $\xi dq_k = \frac{\partial}{\partial p_k}$; $\xi dp_k = -\frac{\partial}{\partial q_k}$. Поэтому $\xi dH = \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial (g^{-1})^{ij}}{\partial q_k} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_k} - \sum_{i,k=1}^n (g^{-1})^{ik} p_i \frac{\partial}{\partial q_k}$.

В координатах q, p отображение Φ выглядит так: пусть $a \in B$, $\nu \in T_a^*B$, тогда $x^i(\Phi(a,\nu)) = q_i(a)$; $\xi^i(\Phi(a,\nu)) = \sum_{i=1}^n (g^{-1})^{ij}(a) p_j(\nu)$. Дифференциал $d\Phi(a,\nu) : T_{(a,\nu)}T^*B \to T_{\Phi(a,\nu)}TB$ действует по формулам $d\Phi(a,\nu)\frac{\partial}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l,j=1}^n \frac{\partial (g^{-1})^{lj}}{\partial q_k} p_j \frac{\partial}{\partial \xi^l} = \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{l,j,s=1}^n \frac{\partial (g^{-1})^{lj}}{\partial x_k} g_{js} \xi^s \frac{\partial}{\partial \xi^l}$, $d\Phi(a,\nu)\frac{\partial}{\partial p_k} = \sum_{l=1}^n (g^{-1})^{lk} \frac{\partial}{\partial \xi^l}$. Сравнивая эти формулы с предложением 4 лекции 6, получаем $d\Phi(\xi dH) = \sum_{l=1}^n \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_{i,j,l=1}^n \Gamma_{ij}^l \xi^i \xi^j \frac{\partial}{\partial \xi^l} = X$ (здесь Γ_{ij}^l — символы Кристоффеля связности Леви–Чивита). □