Симплектические структуры и пуассоновы скобки

Согласно основному уравнению классической механики (второму закону Ньютона) каждой механической системе сопоставляется многообразие B (конфигурационное пространство) и функция (гамильтониан или полная энергия) H на пространстве T^*B. При этом траектории движения системы $x(t) \subset B$ суть проекции на B интегральных траекторий векторного поля ξdH, где $\xi : T^*T^*B \to TT^*B$ — оператор, соответствующий стандартной симплектической структуре на T^*B.

Задача 1. Напишите уравнения движения явно в случае, когда $B = \mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $B = \mathbb{R}^2$, а $H = k(q_1 - q_2)^2/2 + p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2$ (система — два груза массами m_1 и m_2, надетые на стержень и соединенные невесомой идеальной пружиной жесткости k).

Задача 2. Докажите, что $\{P, H\} = 0$, где $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} p_1 + p_2$, а пуассонова скобка определяется стандартной симплектической структурой на T^*B. Выведите отсюда, что интегральные траектории поля ξdH лежат на пересечении поверхностей уровня функций P и H.

Задача 3. Докажите, что ограничение симплектической структуры на пространстве T^*B на подмногообразие $H = c_1, P = c_2$ (совместную поверхность уровня из предыдущей задачи) равно нулю. Найдите явно интегральные траектории поля ξdH, лежащие в этом подмногообразии, и их проекции на B.