Немного о расслоениях

Задача 0. Рассмотрим расслоение одномерных единичных дисков над $\mathbb{R}P^1$, ассоциированное с тавтологическим (тавтологическим называется расслоение, в котором над каждой точкой $\mathbb{R}P^1$ висит соответствующая прямая в $\mathbb{R}^2$). Что такое тотальное пространство этого расслоения?

Задача 1. Пусть T — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^1$. Введите на T какие-нибудь координаты (т.е. выберите тривиализацию) и напишите функции перехода. Проделайте то же для касательного (кокасательного) расслоения.

Задача 2. Классифицируйте двумерные вещественные расслоения

а) над отрезком; б) над окружностью.

Задача 3. Докажите, что любое векторное расслоение над хорошим стягиваемым пространством тривиально.

Задача 4. Классифицируйте двумерные расслоения над S^2.

Задача 5. Пусть T^* — расслоение, двойственное к расслоению из задачи 1, $(T^*)^{\otimes 2}$ — его тензорный квадрат. Применяя операцию овеществления к $(T^*)^{\otimes 2}$, получаем вещественное двумерное расслоение.

а) Докажите, что оно изоморфно касательному расслоению.

б) Вычислите для него инвариант из задачи 4.

Задача 6. Пусть E, F — расслоения над гладким многообразием X. Докажите, что $Hom\,(E,F) \cong E^* \otimes F$.

Задача 7. Пусть S — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^2$, а T — касательное. Докажите, что $T \cong Hom\,(S, V/S)$, где V — тривиальное трехмерное расслоение над $\mathbb{R}P^2$, а плоскость получается проективизацией V.