Немного о расслоениях
Продолжение

Задача 0. Пусть X — гладкое многообразие, E — векторное расслоение ранга n на X. Докажите, что E тривиально тогда и только тогда, когда существуют n глобальных сечений E, линейно независимых в каждой точке.

Задача 1. Докажите, что следующие три утверждения эквивалентны:

а) расслоение тривиально;

б) структурная группа расслоения редуцируется к единичной;

в) если U_i — открытое покрытие (тривиализация), а g_{ij} — функции перехода, то на каждом U_i найдется такая (матричнозначная) функция f_i, что $g_{ij} = f_i^{-1} f_j$ на $U_i \bigcap U_j$.

Задача 2. Вычислите функции перехода для касательных расслоений к T^2, S^3. Что это за расслоения? Тот же вопрос для $SO(3)$.

Задача 3. Выпишите функции перехода для произвольного касательного расслоения.

Задача 4. Пусть x — векторное поле на M. Выпишите (в координатах) действие оператора производной Ли вдоль поля x на

а) векторное поле; б) 1-форму; в) метрику.

Задача 5. Пусть, как и в предыдущей задаче, L_x — производная вдоль векторного поля x, i_x — свертка вдоль поля x (действует на формах), d — оператор внешнего дифференцирования. Докажите, что

$$L_x = i_x \circ d + d \circ i_x.$$

Задача 6. Найдите все дробно-линейные преобразования, сохраняющие метрику Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^1$. Что это за группа?

Задача 7. Докажите, что на $SO(n)$ есть инвариантная метрика.