Связности

"Герой" серии задач 1–3 — тавтологическое расслоение ξ над $\mathbb{R}P^1$: слой над точкой $a \in \mathbb{R}P^1$ это одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, представляемое a.

Задача 1. Введите в расслоении ξ локальные тривиализации и систему функций перехода.

Пусть ∇ — ковариантное дифференцирование, ковариантно постоянные сечения которого соответствуют кривым $\varrho : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $|\varrho(t)| = const$.

Задача 2. Выпишите формулы для символов Кристоффеля этого ковариантного дифференцирования в системе координат, введенной в задаче 1.

Задача 3. Докажите, что это дифференцирование — плоское. Вычислите его монодромию.

Обозначим $\Omega_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1 \neq z_2\}$. Ковариантное дифференцирование на тривиальном k-мерном расслоении $\Omega_2 \times \mathbb{C}^k$ задается формулой $\nabla(w) = dw - \frac{A}{z_1 - z_2}(dz_1 - dz_2)w$, где $w(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^k$ — сечение, а $A : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ — линейный оператор.

Задача 4. Вычислите явно параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t))$. Докажите, что ковариантное дифференцирование ∇ плоское, и вычислите монодромию.

В задачах 5–6 рассматривается ковариантное дифференцирование ∇ на касательном расслоении $T\Pi$ к плоскости Лобачевского Π, обладающее таким свойством: пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, а $\tilde{\gamma}(t) \subset T\Pi$ — ее ковариантно постоянный подъем. Тогда вектор $\tilde{\gamma}(t)$ имеет постоянную длину и образует постоянный угол с касательным вектором $\dot{\gamma}(t)$ к кривой γ.

Задача 5. Вычислите символы Кристоффеля ковариантного дифференцирования ∇ в естественных системах координат моделей Пуанкаре в полуплоскости и в круге. Выведите отсюда, что ∇ существует и единственно.

Задача 6. Опишите явно параллельный перенос вдоль произвольной кривой $\gamma : [0,1] \to \Pi$. Вычислите группу голономии.