МК НМУ. 3 курс 1 семестр. 26.09.00

Связности и кривизна

"Герой" серии задач 1–3 — тавтологическое расслоение ξ над $\mathbb{R}P^1$: слой над точкой $a \in \mathbb{R}P^1$ это одномерное подпространство в $\mathbb{R}^2$, представляемое a.

Задача 1. Введите в расслоении ξ локальные тривиализации и систему функций перехода.

Пусть ∇ — ковариантное дифференцирование, ковариантно постоянные сечения которого соответствуют кривым $\varrho : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $|\varrho(t)| = const$.

Задача 2. Выпишите формулы для символов Кристоффеля этого ковариантного дифференцирования в системе координат, введенной в задаче 1.

Задача 3. Докажите, что это дифференцирование — плоское. Вычислите его монодромию.

Обозначим $\Omega_n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j\}$. Ковариантное дифференцирование на тривиальном k-мерном расслоении $\Omega_n \times \mathbb{C}^k$ зададим формулой $\nabla(w) = dw - \sum\limits_{i<j} \frac{A_{ij}}{z_i - z_j}(dz_i - dz_j)w$, где $w(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^k$ — сечение, а $A_{ij} : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ — линейные операторы.

Задача 4. Обозначим $u_{ij} = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}$, и пусть i, j, k — три различных числа. Докажите, что $u_{ij} \wedge u_{jk} + u_{jk} \wedge u_{ki} + u_{ki} \wedge u_{ij} = 0$.

Задача 5. При каких условиях на операторы A_{ij} ковариантное дифференцирование ∇ плоское ? (Напоминание: ковариантное дифференцирование является плоским тогда и только тогда, когда его кривизна равна нулю).

Пусть теперь $n = 2$.

Задача 6. Вычислите явно параллельный перенос вдоль кривой $\gamma(t) = (z_1(t), z_2(t)) \subset \Omega_2$. Докажите, что ковариантное дифференцирование ∇ плоское, и вычислите монодромию.

В задаче 7 рассматривается ковариантное дифференцирование ∇ на касательном расслоении TM, где M — либо плоскость Лобачевского Π, либо сфера S^2, обладающее таким свойством: пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, а $\tilde{\gamma}(t) \subset TM$ — ее ковариантно постоянный подъем. Тогда вектор $\tilde{\gamma}(t)$ имеет постоянную длину и образует постоянный угол с касательным вектором $\dot{\gamma}(t)$ к кривой γ.

Задача 7. Вычислите символы Кристоффеля ковариантного дифференцирования ∇ в естественных системах координат моделей Пуанкаре в полуплоскости и в круге, и в каких-нибудь координатах на сфере. Выведите отсюда, что ∇ существует и единственно.