МК НМУ. 3 курс 1 семестр.

Римановы связности и геодезические

Задача 1. Пусть ∇ — связность с нулевым кручением на касательном расслоении к B; F — кривизна ∇. Докажите, что для любых векторных полей X, Y, Z на B выполнено равенство $F(X,Y)Z + F(Y,Z)X + F(Z,X)Y = 0$.

Задача 2. Докажите, что если все параллельные переносы принадлежат подгруппе Ли $G \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, то для любых векторов $X, Y \in T_aB$ оператор $F(X,Y) : T_aB \to T_aB$ (F — кривизна соответствующей связности) принадлежит алгебре Ли группы G (это обобщение упражнения из лекции).

Задача 3. Решите упражнение из лекции: докажите, что условие согласованности связности ∇ с римановой метрикой g равносильно равенству $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z(X), Y) + g(X, \nabla_Z(Y))$ для трех произвольных векторных полей X, Y, Z.

Задача 4. Докажите с использованием результатов задач 1 и 2, что если ∇ — связность Леви–Чивита, а F — ее кривизна, то для любых векторных полей X, Y, Z, U выполнено равенство $g(F(X,Y)Z, U) = g(F(Z,U)X, Y)$.

Задача 5. Пусть, в обозначениях задачи 4, R — тензор $R(X,Y,Z,U) = g(F(X,Y)Z,U)$. Выпишите соотношения между координатами тензора R, вытекающие из задач 1, 2 и 4.

Задача 6. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ это а) прямой круговой конус с раствором $\pi/4$ с выкинутой вершиной; б) двухосный эллипсоид $x^2 + y^2 + az^2 = 1$. Введите на M атлас (карты и функции перехода) и запишите в соответствующих координатах риманову метрику g, наследуемую из $\mathbb{R}^3$. Выпишите символы Кристоффеля связности Леви–Чивита, определите ее кривизну и задайте уравнения геодезических.