МК НМУ. Первый курс. Семинар по геометрии.
5 октября 2000 года.

Скалярное произведение

Мы будем рассматривать два различных скалярных произведения в трёхмерном пространстве:

- *евклидово* $E(e_1, e_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$,
- *гиперболическое* $H(e_1, e_2) = -x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

(Здесь (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — координаты векторов e_1 и e_2 соответственно.)

Иногда мы будем писать просто (e_1, e_2), оговаривая, в случае необходимости, о каком именно произведении идёт речь.

Ортогональным дополнением к ненулевому вектору e мы назовём множество $e^\perp$ таких векторов v, что $(v, e) = 0$.

1. а) Докажите, что ортогональное дополнение к вектору суть множество векторов, компланарных некоторой плоскости. Эту плоскость мы обозначаем Π_e и, допуская вольность речи, также называем ортогональным дополнением к вектору.

б) Докажите, что $e \notin e^\perp$ (в случае евклидова скалярного произведения).

в) Для каких векторов $e \in e^\perp$ (в случае гиперболического скалярного произведения)?

2. Докажите, что для любой плоскости Π найдётся такой вектор e, что $\Pi = \Pi_e$.

3. Докажите, что для евклидова скалярного произведения выполнено *неравенство Коши–Буняковского*

$$(e_1, e_2)^2 \leq (e_1, e_1)(e_2, e_2).$$

В каком случае достигается равенство?

Вектор e называется *изотропным*, если $(e, e) = 0$.

4. Докажите, что для любого неизотропного вектора e любой вектор v пространства однозначно представляется в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \parallel e$, а $v_2 \in e^\perp$. Найдите явную формулу, выражающую v_1 и v_2 через v и e с помощью арифметических операций и скалярного умножения.

5. Докажите, что в трёхмерном евклидовом пространстве можно выбрать не более четырёх векторов, образующих попарно тупые углы.

Модель на гиперболоиде

Пусть $E^{2,1}$ — трёхмерное пространство, снабжённое гиперболическим скалярным произведением, H — одна из двух связных компонент гиперболоида, задаваемого уравнением $(e,e) = -1$. Этот гиперболоид представляет собой модель пространства Лобачевского. Прямыми в этой модели являются непустые пересечения гиперболоида с плоскостями, проходящими через начало координат.

6. Докажите, что плоскость Π_e пересекается с гиперболоидом H тогда и только тогда, когда $(e,e) > 0$.

7. Пусть l_1 и l_2 — прямые в модели на гиперболоиде, задаваемые плоскостями Π_{e_1} и Π_{e_2}. Докажите следующее соответствие:

прямые l_1 и l_2 пересекаются	для векторов e_1 и e_2 выполнено строгое неравенство Коши–Буняковского
прямые l_1 и l_2 параллельны	для векторов e_1 и e_2 выполнено равенство в неравенстве Коши–Буняковского
прямые l_1 и l_2 расходятся	для векторов e_1 и e_2 неравенство Коши–Буняковского не выполнено

8. Докажите, что существует отражение в модели на гиперболоиде, переводящее любую точку гиперболоида в любую другую его точку.

9. Пусть e_1, e_2, e_1', e_2' — векторы в $E^{2,1}$, причём $(e_1,e_1) = (e_1',e_1') = -1$, $(e_2,e_2) = (e_2',e_2') = 1$, $(e_1,e_2) = (e_1',e_2') = 0$. Докажите, что существует движение в модели на гиперболоиде, переводящее e_1 в e_1', а e_2 в e_2'.

10. Докажите, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha & -\cos\beta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\gamma \\ -\cos\beta & -\cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

положителен, если $\alpha+\beta+\gamma > \pi$, равен нулю, если $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ и отрицателен, если $\alpha+\beta+\gamma < \pi$.