Лекция 1

Пусть k - поле характеристики $\neq 2$. *Квадратичной формой* q над k называется диагональная часть некоторой симметрической билинейной формы B_q на (конечномерном) векторном пространстве V_q/k. Таким образом, квадратичную форму надо представлять себе как пару (V_q, q), но мы, как правило, будем опускать векторное пространство, если это не вызывает путаницы. Две квадратичных формы называются изоморфными, если существует изоморфизм соответствующих векторных пространств, сохраняющий значения формы. На множестве квадратичных форм определены операции $+$ и $\cdot$. А именно, $(V_{q_1}, q_1)+(V_{q_2}, q_2) := (V_{q_1} \oplus V_{q_2}, q_1 \oplus q_2)$ - ортогональная сумма (такую форму мы также будем обозначать $q_1 \perp q_2$), и $(V_{q_1}, q_1) \cdot (V_{q_2}, q_2) := (V_{q_1} \otimes V_{q_2}, q_1 \otimes q_2)$.

Если p - подформа в квадратичной форме q, то определим *ортогональное дополнение* к ней как форму $(V_{p^\perp}, p^\perp)$, где $V_{p^\perp} = \{v \in V_q \mid B_q(v, w) = 0,\ \forall w \in V_p\}$, и $p^\perp = q|_{V_{p^\perp}}$. Форма называтся невырожденной, если $V_{q^\perp} = 0$, то есть, если в V_q нет векторов, ортогональных всем. Если q - произвольная форма, и W - произвольное линейное дополнение к пространству $V_{q^\perp}$ в V_q, то $(V_q, q) = (V_{q^\perp}, 0) + (W, q|_W)$. При этом форма $(W, q|_W)$ определена с точностью до изоморфизма формой (V_q, q); она называется её *невырожденной частью*. Если p - невырожденная подформа в квадратичной форме q, то $q = p \perp p^\perp$. В частности, если $v \in V_q$ - *анизотропный вектор* (то есть, $q(v) \neq 0$), и $l(v)$ - 1-мерное подпространство в V_q, порождённое v, то $(V_q, q) = (l(v), q|_{l(v)}) \perp (l(v)^\perp, q|_{l(v)^\perp})$. Учитывая, что невырожденная форма размерности > 0 всегда имеет анизотропный вектор, мы получаем:

Утверждение 1.1 *Пусть $char(k) \neq 2$. Тогда любая квадратичная форма есть ортогональная сумма одномерных.*

Одномерную форму (k, ax^2) мы будем обозначать $\langle a \rangle$, а форму $\langle a_1 \rangle \perp \ldots \perp \langle a_n \rangle$ - через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Такую запись мы будем называть *диагонализацией* квадратичной формы. Конечно же, одна и та же форма имеет много разных диагонализаций, например, любое из чисел a_i можно умножить на ненулевой квадрат.

Об истории квадратичных форм

В истории квадратичных форм можно выделить три периода:

1) До ≈ 1960 г. Тут изучались в основном квадратичные формы над числовыми полями. Можно отметить работы: Миньковского, Хассе, Витта.

2) $\approx 1960-1980$. Квадратичные формы над произвольными полями, теория пфистеровых форм. Пфистер, Кнебуш, Шарлау, Лэм.

3) $\approx$ с 1970 г. К-теорные методы. Милнор, Арасон, Меркурьев, Рост, Воеводский, Кан, Хоффманн, Ижболдин.

Некоторые примеры

Определение 1.2 *Назовём квадратичную форму анизотропной, если* $q(v) \neq 0$ *для любого* $v \in V_q$.

Определение 1.3 *Пусть* k *- поле характеристики не* 2.
Определим s*-инвариант поля* k *как супремум таких* n*, что квадратичная форма* $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ *- анизотропна.*
Определим u*-инвариант поля* k *как* $\sup(\dim(q/k) \,|\, q -$ *анизотропна*$)$.

Возникает естественный вопрос, какие значения могут приниматься этими инвариантами? Следующая гипотеза очень хорошо демонстрирует состояние теории квадратичных форм до появления работ Альбрехта Пфистера.

Гипотеза (Капланский, 1951 г.)

(1) $s(k) = 2^n$ *или* ∞.

(2) $u(k) = 2^n$ *или* ∞.

Если 1-я часть гипотезы была вскоре (меньше чем через 15 лет) доказана А.Пфистером, то 2-я часть оказалась неверна. Контрпримеры были построены для любого чётного $u(k)$ А.Меркурьевым (1984 г.), и для $u(k) = 9$ О.Ижболдиным (1999 г.). Глядя с современной точки зрения на гипотезу Капланского, можно заключить, что математиками того периода существенно недооценивалось принципиальное различие между суммой квадратов и произвольной квадратичной формой. В нашем курсе мы ознакомимся с многообразием квадратичных форм, и, в частности, увидим, что формы типа суммы квадратов (так называемые *соседи пфистеровых форм*) составляют весьма маленький подкласс там.

Сейчас же мы ограничимся тем, что покажем, что s-инвариант поля k принимает значения 1, 2, 4, или вида $8r$. Чтобы увидеть, что $s(k) = 1$, либо чётен, достаточно доказать, что если $n \geq 2$ и форма $x_1^2 + \ldots + x_{2n}^2$ - изотропна, то и $x_1^2 + \ldots + x_{2n-1}^2$ - изотропна. Пусть p и q - квадратичные формы над k. Мы скажем, что p *действует на* q, если задано такое линейное отображение $\mu : V_p \otimes_k V_q \to V_q$, что для любых $u \in V_p$, $v \in V_q$, $q(\mu(u \otimes v)) = p(u) \cdot q(v)$. Заметим, что квадратичная форма $x^2 + y^2$ совпадает с $k\sqrt{-1} \stackrel{Nr_{k\sqrt{-1}/k}}{\to} k$, где $k\sqrt{-1}$ рассматривается как 2-мерное векторное пространство над k. Так как норма произведения равна произведению норм, то это задаёт действие квадратичной формы $x^2 + y^2$ на себе, где μ - это умножение в алгебре $k\sqrt{-1}$. Более того, если форма $x^2 + y^2$ - анизотропна, то $k\sqrt{-1}$ - это поле. Пусть форма $q :=\perp_{i=1}^{n} \langle 1, 1\rangle$ - изотропна, и $w := (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ - ненулевой изотропный вектор. Тогда, если среди его координат есть нулевые, то форма $\perp_{i=1}^{2n-1} \langle 1\rangle$ - изотропна. То же самое произойдёт, если форма $\langle 1, 1\rangle$ - изотропна. Поэтому, мы можем считать, что $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, и $x_n^2 + y_n^2 \neq 0$. Мы имеем действие формы $\langle 1, 1\rangle$ на $q =\perp_{i=1}^{n} \langle 1, 1\rangle$. В частности, взяв $u = (x_n^2 + y_n^2)^{-1}(x_n, -y_n)$, мы получаем, что $\varphi := \mu(u, \cdot) : V_q \to V_q$ - это такое линейное отображение, что $q(\varphi(v)) = (x_n^2 + y_n^2)^{-1} \cdot q(v)$, для любого $v \in V_q$. Значит, $\varphi(w)$ - изотропный вектор, но две его последние координаты будут $(1, 0)$. Стало быть, форма $\perp_{i=1}^{2n-1} \langle 1\rangle$ - изотропна.

Заметим, что ключевым моментом здесь было использование квадратичной формы $\langle 1, 1\rangle$ с билинейным умножением μ на ней. Аналогичным образом, можно показать, что если $s(k) > 2$, то $s(k) = 4m$. Опять же, достаточно проверить, что если $q :=\perp_{i=1}^{m} \langle 1, 1, 1, 1\rangle$ - изотропна, то и $\perp_{j=1}^{4m-3} \langle 1\rangle$ - изотропна. Введём билинейное умножение на форме $p := \langle 1, 1, 1, 1\rangle$. Заметим, что $\langle 1, 1, 1, 1\rangle = \langle 1, 1\rangle \perp \langle 1, 1\rangle$, и мы можем определить умножение формулой $(u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) := (u_1u_2 - v_2\overline{v_1}, \overline{u_1}v_2 + u_2v_1)$, где $u_i, v_j \in V_{\langle 1,1\rangle}$, и $\bar{}$ - сопряжение в $V_{\langle 1,1\rangle} = k\sqrt{-1}$, $x + \sqrt{-1}y \mapsto x - \sqrt{-1}y$. При этом $(x, y, z, t) \cdot (x, -y, -z, -t) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \cdot (1, 0, 0, 0)$. Тогда возникает и естественное действие μ формы $\langle 1, 1, 1, 1\rangle$ на $q :=\perp_{i=1}^{m} \langle 1, 1, 1, 1\rangle$. Пусть $v := (x_1, y_1, z_1, t_1, \ldots, x_m, y_m, z_m, t_m)$ - изотропный вектор формы q. Если $(x_m, y_m, z_m, t_m) = (0, 0, 0, 0)$, или $x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 + t_m^2 = 0$, то форма $\perp_{j=1}^{4m-3} \langle 1\rangle$ - изотропна. В противном случае, если $w := (x_m, -y_m, -z_m, -t_m)$, то $\mu(w, v)$ будет изотропным вектором в V_q, причём последние четыре его координаты будут $(1, 0, 0, 0)$. Что показывает изотропность формы $\perp_{j=1}^{4m-3} \langle 1\rangle$.

Заметим, что на форме $p := \langle 1,1,1,1,1,1,1,1\rangle$ также можно ввести билинейное умножение (уже использованной) формулой $(u_1, v_1)\cdot(u_2, v_2) := (u_1u_2 - v_2\overline{v_1}, \overline{u_1}v_2 + u_2v_1)$, где $u_i, v_j \in V_{\langle 1,1,1,1\rangle}$, и $^-$ - сопряжение в $V_{\langle 1,1,1,1\rangle}$, $(x, y, z, t) \mapsto (x, -y, -z, -t)$. И опять же, $(u, v)\cdot(\overline{u}, -v) = p((u, v))\cdot(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Таким образом, если $s(k) > 4$, то $s(k) = 8r$.

Заметим, что алгебры, возникающие в наших трёх случаях, - это квадратичное расширение $k\sqrt{-1}$, алгебра кватернионов $\mathrm{Quat}(-1, -1) = k < \alpha, \beta > /(\alpha^2 = -1, \beta^2 = -1, \alpha\beta = -\beta\alpha)$, и алгебра октав $\mathbb{O}(-1, -1, -1)$. Хотелось бы и дальше строить умножение на формах вида $\perp_{i=1}^{2^l} \langle 1\rangle$, но, к сожалению, уже форма $\perp_{i=1}^{16} \langle 1\rangle$ таким умножением не обладает. На самом деле, все случаи, когда такое умножение на сумме квадратов возможно, уже перечислены. Более того, для произвольной квадратичной формы q такое умножение существует только если она имеет размерность 1,2,4, или 8, и является, так называемой, *формой Пфистера* кратности 0,1,2, или 3. Тем не менее, если ослабить условие на умножение, а именно, требовать только, чтобы оно было линейным по первой переменной и рациональным по второй, то, как мы увидим в дальнейшем, такая операция найдётся на всех формах вида $\perp_{i=1}^{2^l} \langle 1\rangle$ (соответственно, на пфистеровых формах любой кратности). И этого будет достаточно для доказательства 1-ой части гипотезы Капланского.

Упражнение 1.1 *Показать, что норма в алгебре кватернионов и октав действительно мультипликативна.*

Упражнение 1.2 *Показать, что форма $\langle 1,1,1\rangle$ не обладает билинейным умножением. (На самом деле, уже форма $\langle 1,1\rangle$ не может действовать на $\langle 1,1,1\rangle$.)*