Лекция 10

Простые алгебры

Определение 10.1 *Пусть A - это ассоциативная алгебра с единицей над полем k.*

(1) *A называется простой, если она не содержит нетривиальных (отличных от 0 и A) двусторонних идеалов.*

(2) *A называется центральной над k, если её центр $Z(A)$ совпадает с k.*

Примеры:

(1) A - поле над k, тогда A простая (но не центральная, если $A \neq k$).

(2) A - тело (то есть, ассоциативная алгебра с делением) над k, тогда A - простая (и, возможно, центральная).

(3) $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$, тогда A простая центральная.

К этим примерам, по сути дела, всё и сводится.

Теорема 10.2 *Пусть A - это конечномерная алгебра над полем k. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *A - простая.*

(2) *$A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$, где D - это конечномерное тело над k.*

Более того, при этих условиях, A - центральная $\Leftrightarrow$ D - центральная. При этом D однозначно восстанавливается по A.

Приведём некоторые основные свойства центральных простых алгебр.

Теорема 10.3

(1) *Если A - центральная простая над k, и B - простая, то $A \otimes_k B$ - простая. Если A и B - центральные простые над k, то $A \otimes_k B$ - тоже центральная простая.*

(2) $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A)\otimes_k B = \mathrm{Mat}_{n\times n}(A\otimes_k B)$.

(3) $A\otimes_k A^* = \mathrm{End}_k(A) = \mathrm{Mat}_{\dim(A)\times\dim(A)}(k)$, *где* A^* *- это алгебра с противоположным умножением* $(a\circ_{A^*} b := b\circ_A a)$.

Теперь мы можем ввести следующее определение:

Определение 10.4 *Назовём две конечномерные ц.п.а.* A *и* B *стабильно эквивалентными, если* $A = \mathrm{Mat}_{n\times n}(D)$ *и* $B = \mathrm{Mat}_{m\times m}(D)$ *для одной и той же алгебры с делением* D.

На множестве классов стабильной эквивалентности конечномерных ц.п.а. над k *(или, что то же самое, на множестве конечномерных тел над* k*) операция тензорного произведения* $\otimes_k$ *задаёт структуру (абелевой) группы (как видно из теоремы 10.3). Эта группа называется группой Брауэра поля* k*, и обозначается* $\mathrm{Br}(k)$.

Из теорем 10.2 и 10.3(1) (и того факта, что над алгебраически замкнутым полем нет нетривиальных конечномерных тел) следует, что для любой конечномерной ц.п.а. A над k, выполняется: $A|_{\overline{k}} = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\overline{k})$. В частности, $\dim(A) = n^2$.

Определение 10.5 *Индексом* $ind(A)$ *ц.п.алгебры* A *называется число* $\sqrt{\dim(D_A)}$*, где* D_A *- это алгебра с делением, соответствующая* A*. Экспонентой* $e(A)$ *алгебры* A *называется порядок* $[A]$ *в группе Брауэра.*

Теорема 10.6

(1) $e(A)$ *делит* $ind(A)$.

(2) $e(A)$ *и* $ind(A)$ *делятся на одни и те же простые делители.*

Центральная простая алгебра с $ind(A) = p^t$, где p - простое, называется p-примарной.

Теорема 10.7 *Пусть* A *- (как всегда, конечномерное) тело над* k*. Пусть* $ind(A) = p_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{t_s}$ *- разложение на* p*-примарные компоненты. Тогда для всех* $1\le i\le s$*, в* A *имеются однозначно-определённые подтела* A_{p_i}*, такие что* $ind(A_{p_i}) = p_i^{t_i}$ *и* $A = A_{p_1}\otimes_k\ldots\otimes_k A_{p_s}$.

Благодаря этому результату большинство вопросов о ц.п.алгебрах сводится к случаю p-примарных алгебр.

Нас в основном будут интересовать ц.п.алгебры экспоненты 2. Примерами таких алгебр являются алгебры (обобщённых) кватернионов $\mathrm{Quat}(a,b)$, а также любые их тензорные произведения $\mathrm{Quat}(a_1,b_1)\otimes_k$

$\ldots \otimes_k \mathrm{Quat}(a_m, b_m)$ (по теореме 10.3(1)). В некотором смысле, это даёт почти все возможные примеры. Теорема Меркурьева утверждает, что любая ц.п.а. экспоненты 2 стабильно эквивалентна тензорному произведению кватернионных алгебр.

Вот ещё один важный результат, который нам понадобится:

Теорема 10.8

(1) *Пусть A - (конечномерная) ц.п.а. над k, и B - простая подалгебра. Обозначим через $Z_A(B)$ - централизатор B в A (То есть, множество элементов, коммутирующих с B). Тогда $Z_A(B)$ - простая, и* $\dim(A) = \dim(B) \cdot \dim(Z_A(B))$.

(2) *Если, при этом, B - центральная простая, то $Z_A(B)$ - также центральная простая, и $A = B \otimes_k Z_A(B)$.*

Алгебра Клиффорда

Оказывается, что каждой квадратичной форме можно естественным образом сопоставить некоторую центральную простую алгебру.

Определение 10.9 *Алгеброй Клиффорда квадратичной формы q называется ассоциативная алгебра $C(q) := \mathrm{T}^*_k(V_q)/(v \otimes v - q(v),\, v \in V_q)$.*

Соотношения в $C(q)$ не однородны, но $\mathbb{Z}/2$ -однородны. Поэтому $C(q)$ имеет естественную $\mathbb{Z}/2$-градуировку. Чётная часть $C(q)$ является подалгеброй и называется чётной алгеброй Клиффорда $C_0(q)$.

На множестве $\mathbb{Z}/2$-градуированных алгебр можно ввести следующую ассоциативную операцию умножения:

Определение 10.10 *Пусть A и B - это $\mathbb{Z}/2$-градуированные алгебры над k. Определим алгебру $A \odot B$ как векторное пространство $A \otimes B$, где градуировка $\overline{a \otimes b}$ равна $\overline{a} + \overline{b}$, и $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) := (-1)^{\overline{b}\overline{c}}(ac \otimes bd)$ для любых однородных элементов $a, c \in A$, $b, d \in B$.*

В этих терминах легко выразить алгебру Клиффорда суммы квадратичных форм.

Утверждение 10.11 *Пусть $q = p \perp r$. Тогда $C(q) \cong C(p) \odot C(r)$.*

Доказательство: Очевидно. □

Заметив, что $C(\langle a \rangle) = k\sqrt{a}$ с градуировкой $\overline{1} = 0$, $\overline{\sqrt{a}} = 1$, мы получаем, что если $q = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, то $C(q) = k\sqrt{a_1} \odot \ldots \odot k\sqrt{a_n}$. Иными словами, $C(q) = k\langle x_1, \ldots, x_n \rangle / (x_i^2 = a_i,\ x_i x_j = -x_j x_i$ при $i \neq j)$.

Также легко видеть, что $C(\langle a, b \rangle) \cong \mathrm{Quat}(a, b)$, и $C_0(\langle a, b \rangle) = k\sqrt{-ab} = k\sqrt{\det_{\pm}(\langle a, b \rangle)}$.

Вычислим алгебру Клиффорда 3-х мерной формы.

Лемма 10.12 *Пусть* $q = \langle a, b, c\rangle$. *Тогда* $C_0(q) \cong \mathrm{Quat}(-ab, -bc)$, *и* $C(q) \cong C_0(q) \otimes k\sqrt{-abc} \cong \mathrm{Quat}_k(-ab, -bc) \otimes k\sqrt{-abc}$.

Последнее равенство может быть переписано в виде: $C(q) = C_0(q) \odot k\sqrt{\det_\pm(q)}$, *где мы представляем* $C_0(q)$ *как градуированную алгебру, сконцентрированную в градуировке 0.*

Доказательство: $C(q) = k\langle \alpha, \beta, \gamma\rangle/(\alpha^2 = a, \beta^2 = b, \gamma^2 = c, \alpha\beta = -\beta\alpha, \beta\gamma = -\gamma\beta, \gamma\alpha = -\alpha\gamma)$. Тогда $C_0(q)$ имеет k-базис: $1, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$. Обозначив: $u = \alpha\beta$, $v = \beta\gamma$, мы получаем $C_0(q) = k\langle u, v\rangle/(u^2 = -ab, v^2 = -bc, uv = -vu) \cong \mathrm{Quat}(-ab, -bc)$.

С другой стороны, $\alpha\beta\gamma$ коммутирует с $C_0(q)$, и $(\alpha\beta\gamma)^2 = -abc$. Таким образом, мы получаем сюрьективное отображение $C_0(q) \otimes_k k\sqrt{-abc}$, которое обязано быть изоморфизмом по соображениям размерности. □

Теперь мы можем индуктивно вычислить алгебру Клиффорда произвольной квадратичной формы.

Теорема 10.13

(1) *Пусть* $\dim(q)$ *- нечётна. Тогда* $C(q) \cong C_0(q) \otimes k\sqrt{\det_\pm(q)} = C_0(q) \odot k\sqrt{\det_\pm(q)}$ *(здесь* $k\sqrt{\det_\pm(q)}$ *предполагается снабжённым стандартной градуировкой), и* $C_0(q)$ *- это ц.п.алгебра над* k *экспоненты* 2.

(2) *Пусть* $\dim(q)$ *- чётна. Тогда существуют ц.п.а.* A *экспоненты* 2 *над* k, *и (*$\mathbb{Z}/2$*-градуированная) кватернионная алгебра* $\mathrm{Quat}(e, f)$ *такие, что* $\mathrm{Quat}(e, f)_0 = \sqrt{\det_\pm(q)}$ *и* $C(q) = A \odot \mathrm{Quat}(e, f)$. *В частности,* $C_0(q) = A \otimes k\sqrt{\det_\pm(q)}$, *и* $C(q)$ *- это ц.п.алгебра экспоненты* 2 *над* k.

Доказательство: Будем использовать индукцию по $n = \dim(q)$. При $n \leq 3$ утверждение нам известно. В индуктивном переходе рассмотрим два случая:

1) $\dim(q)$ - чётна, и $p = q \perp \langle a\rangle$. Тогда, по предположению индукции, $C(q) \cong A \odot \mathrm{Quat}(e, f)$, где $k\sqrt{-ef} = \mathrm{Quat}(e, f)_0 = k\sqrt{\det_\pm(q)}$. По утверждению 10.11, $C(p) \cong C(q) \odot C(\langle a\rangle) \cong (A \odot \mathrm{Quat}(e, f)) \odot k\sqrt{a} \cong A \odot (\mathrm{Quat}(e, f) \odot k\sqrt{a}) \cong A \odot C(\underline{\langle e, f, a\rangle}) \cong A \odot (\mathrm{Quat}(-ea, -fa) \odot k\sqrt{-efa}) = (A \otimes \mathrm{Quat}(-ea, -fa)) \odot k\sqrt{\det_\pm(p)}$.

2) Аналогично, в случае $\dim(p)$ - нечётна, и $q = p \perp \langle b\rangle$. Мы имеем: $C(p) = C_0(p) \odot k\sqrt{\det_\pm(p)}$. Тогда $C(q) \cong C(p) \odot C(\langle b\rangle) \cong C_0(p) \odot (k\sqrt{\det_\pm(p)} \odot k\sqrt{b}) \cong C_0(p) \odot \mathrm{Quat}(\det_\pm(p), b)$, где на $\mathrm{Quat}(\det_\pm(p), b) \cong$

$k\sqrt{\det_\pm(p)}\odot k\sqrt{b}$ выбрана стандартная градуировка. В частности, $C_0(q)\cong C_0(p)\otimes k\sqrt{-b\det_\pm(p)} = C_0(p)\otimes k\sqrt{\det_\pm(q)}$. □

Заметим, что инвариант $sw_1(q) = \det_\pm(q)$ квадратичной формы q восстанавливается по её алгебре Клиффорда. А именно, $k\sqrt{\det_\pm(q)}$ является центром $Z(C_0(q))$ алгебры $C_0(q)$, если $\dim(q)$ - нечётна, и центром $Z(C(q))$ алгебры $C(q)$, если $\dim(q)$ - чётна.

Оказывается, что и инвариант $sw_2(q)$ тесно связан с $C(q)$.

Определение 10.14 *Определим инвариант Клиффорда $c(q)$ формы q как элемент группы Брауэра $\mathrm{Br}(k)$, соответствующий ц.п.алгебре $C_0(q)$, если $\dim(q)$ - нечётна, и $C(q)$, если $\dim(q)$ - чётна. По теореме 10.13, этот элемент имеет порядок 2.*

Имеется естественное отображение из $\mathrm{K}_2^M(k)/2$ в подгруппу $\mathrm{Br}_2(k)$ элементов порядка 2 в группе Брауэра $\psi : \mathrm{K}_2^M(k)/2 \to \mathrm{Br}_2(k)$, определённое правилом: $\psi(\{a,b\}) = [\mathrm{Quat}(a,b)]$. Для доказательства корректности достаточно заметить, что $\mathrm{Quat}(a, 1-a)\cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(k)$ и
$\mathrm{Quat}(a,b)\otimes_k \mathrm{Quat}(a,c)\cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{Quat}(a,bc))$, (проверьте это!).

Теорема Меркурьева утверждает, что отображение ψ является изоморфизмом.

Теорема 10.15

(1) *Если $\dim(q)$ - нечётна, то $c(q) = \psi(sw_2(q))$.*

(2) *Если $\dim(q)$ - чётна, то $c(q) = \psi(sw_2(q) + \{-1\}\cdot sw_1(q))$.*

Доказательство: Будем доказывать утверждение индуктивно. Основание индукции очевидно: $c(\langle a\rangle) = 0$, и $sw_2(\langle a\rangle) = 0$. Из теоремы 10.13 и определения классов Штифеля-Уитни следует:

1) Если $\dim(p)$ - нечётна, и $q = p\perp\langle b\rangle$, то

$$c(q) = c(p) + [\mathrm{Quat}(b, \det_\pm(p))];$$

$$sw_2(q) = sw_2(p) + \{b, \det_\pm(p)\} + \{-1, \det_\pm(q)\}.$$

2) Если $\dim(q)$ - чётна, и $p = q\perp\langle a\rangle$, то

$$c(p) = c(q) + [\mathrm{Quat}(a, \det_\pm(q))] + [\mathrm{Quat}(-1, \det_\pm(q))];$$

$$sw_2(p) = sw_2(q) + \{a, \det_\pm(q)\}.$$

Отсюда легко следует нужное утверждение. □

Заметим, что $c|_{I^2} = \psi \circ sw_2|_{I^2}$, и из теоремы Меркурьева (а также аналогичного свойства для sw_2) мы получаем, что $q \in I^3 \Leftrightarrow c(q) = 0$.

Таким образом, $C(q)$ "кодирует информацию" о q, связанную с $\mathrm{K}_0^M(k)/2$, $\mathrm{K}_1^M(k)/2$ и $\mathrm{K}_2^M(k)/2$. Однако, при этом, эта алгебра не несёт информации о $\mathrm{K}_n^M(k)/2$-инвариантах q при $n \geq 3$ (например, $C(\langle\langle a, b, c\rangle\rangle)$ будет изоморфна алгебре Клиффорда гиперболической формы той же размерности (8)).

Вместе с тем, алгебра Клиффорда позволяет работать со "старыми" инвариантами sw_0, sw_1, sw_2, используя технику ц.п.алгебр. В качестве иллюстрации, опишем все квадратичные формы с билинейным умножением.

Квадратичные формы с билинейным умножением

Предположим, мы имеем "действие" формы p на форме q (мы, как всегда, предполагаем их невырожденными), то есть, имеется линейное отображение $\rho : V_p \to \mathrm{End}_k(V_q)$, такое, что для любых $v \in V_p$, $x, y \in V_q$: $q(\rho(v)(x), \rho(v)(y)) = p(v) \cdot q(x, y)$. Форма q позволяет отождествить V_q с V_q^*. Тогда, наше условие переписывается как: $\rho(v) \circ \rho^*(v) = p(v) \cdot Id_{V_q}$.

Определим гомоморфизм $\tau : C_0(p) \to \mathrm{End}_k(V_q)$ формулой $\tau(v_1 \otimes v_2 \otimes \ldots \otimes v_{2m}) = \rho(v_1) \circ \rho(v_2)^* \circ \rho(v_3) \circ \rho(v_4)^* \circ \ldots \circ \rho(v_{2m})^*$.

Упражнение 10.1 *Проверьте корректность такого определения.*

Заметим, что отображение τ - ненулевое. Алгебра $C_0(p)$ является простой размерности $2^{\dim(p)-1}$, если $\dim(p)$ - нечётна, и содержит простую подалгебру A размерности $2^{\dim(p)-2}$, если $\dim(p)$ - чётна.

Так как подалгебра содержит 1, то τ на ней ненулевое $\Rightarrow$ мономорфизм, так как ядро, иначе, было бы нетривиальным двусторонним идеалом. Стало быть, $\mathrm{End}_k(V_q)$ содержит простую подалгебру размерности $2^{\dim(p)-1}$, если $\dim(p)$ - нечётна, и размерности $2^{\dim(p)-2}$, если $\dim(p)$ - чётна. Это влечёт, что $(\dim(q))^2$ делится на $2^{\dim(p)-1}$ и $2^{\dim(p)-2}$, соответственно (по теореме 10.8(1)).

Если, теперь, q - форма с билинейным умножением, то q "действует" на себе, и $(\dim(q))^2$ делится на $2^{\dim(q)-1}$, или $2^{\dim(q)-2}$, в зависимости от чётности $\dim(q)$.

Нетрудно видеть, что в таком случае, $\dim(q)$ может равняться только 1,2,4, или 8-ми.

Так как форма с билинейным умножением является мультипликативной, а мультипликативными являются только гиперболические и пфистеровы формы, то мы получаем (заметим, что гиперболические формы размерностей 1,2,4,8 одновременно и пфистеровы):

Теорема 10.16 *Пусть q - это невырожденная форма. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *q с билинейным умножением.*

(2) *q пфистерова кратности 0,1,2, или 3.*

Упражнение 10.2 *Пусть $k = \mathbb{R}$, $p = \langle 1, \dots, 1 \rangle$ и $q = \langle 1, \dots, 1 \rangle$ - это формы размерности m и n, соответственно. При каких m и n возможно действие p на q. Установите связь с векторными полями на сфере.*