Лекция 11

В качестве другого применения алгебр Клиффорда, построим поля с любым чётным u-инвариантом.

Формулы для редукции индекса ц.п.а

Здесь нас будет интересовать вопрос: что происходит с индексом ц.п.алгебры над расширениями базового поля. Следующая классическая теорема отвечает на этот вопрос в случае конечного расширения.

Теорема 11.1 *Пусть D - конечномерное центральное тело над полем k, и E/k - конечное расширение полей. Тогда $\mathrm{ind}(D_E) = \mathrm{ind}(D)/m$, где m - это наибольшая размерность (над k) подполя $F \subset E$, которое одновременно является подполем в D.*

Ответ также известен для случая, когда E - это поле функций на некотором однородном пространстве над k (Меркурьев - Панин). В частности, если $E = k(q)$, где q - некоторая квадратичная форма, то имеется следующая:

Теорема 11.2 (А.Меркурьев) *Пусть D - это центральное конечномерное тело над k, и q - квадратичная форма над k. Тогда $\mathrm{ind}(D_{k(q)})$ либо $= \mathrm{ind}(D)$, либо $\mathrm{ind}(D)/2$. При этом последнее происходит только в следующих случаях:*

(1) *Если $\dim(q)$ - нечётна, то $D \cong B \otimes_k C_0(q)$ для некоторой ц.п.алгебры B.*

(2) *Если $\dim(q)$ - чётна, и $\det_{\pm}(q) \neq 1$, то $D_{k\sqrt{\det_{\pm}(q)}} \cong B \otimes_k C(q)$ для некоторой ц.п.алгебры B над $k\sqrt{\det_{\pm}(q)}$.*

(3) *Если $\dim(q)$ - чётна, и $\det_{\pm}(q) = 1$ (иначе говоря, $q \in I^2(k)$), то $D \cong B \otimes_k A$, где A - это алгебра из теоремы 10.13, и B - это некоторая ц.п.алгебра над k.*

Доказательство этого факта использует вычисление квилленовской К-теории проективной квадрики (см. (1) А.Меркурьев "Простые алгебры и квадратичные формы", Изв. Акад. Наук СССР, сер. Матем., Том

55 (1991), ном.1; (2) R.G.Swan "K-theory of quadratic hypersurfaces", Ann. of Math. (2) **122** (1985), 113-153), и мы опускаем его.

Собственно, нам для наших целей будет достаточно рассматривать случай нечётномерной формы.

Поля с u-инвариантами $2n$

Упражнение 11.1 *Показать, что если $q \in I^2(k)$, то $C(q) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(A)$, где A - ц.п.алгебра из теоремы 10.13.*

Пусть $q \in I^1(k)$ - анизотропна. Верно ли, что если $\mathrm{ind}(C(q)) < 2^{\dim(q)/2}$, то $q \in I^2(k)$?

Таким образом, если $q \in I^2(k)$, то $\mathrm{ind}(C(q)) \leq 2^{(\dim(q)-2)/2}$.

Заметим также, что в силу теоремы 10.15, $c(q \perp \mathbb{H}) = c(q)$, и, значит, $\mathrm{ind}(C(q)) = \mathrm{ind}(C(q \perp \mathbb{H}))$. Стало быть, $\mathrm{ind}(C(q)) \leq 2^{(\dim(q_{an})-2)/2}$. Отсюда следует, что если $q \in I^2(k)$, и $\mathrm{ind}(C(q)) = 2^{(\dim(q)-2)/2}$, то q - анизотропна. Таким образом, если индекс алгебры Клиффорда формы $q \in I^2$ максимален, то для любого расширения полей E/k, форма $q|_E$ будет анизотропной, если $\mathrm{ind}(C(q)_E) = \mathrm{ind}(C(q))$.

Пусть k - некоторое поле, над которым имеются кватернионные алгебры $\mathrm{Quat}(a_1, b_1), \ldots, \mathrm{Quat}(a_n, b_n)$, такие, что алгебра $C := \mathrm{Quat}(a_1, b_1) \otimes_k \ldots \otimes_k \mathrm{Quat}(a_n, b_n)$ имеет максимальный индекс (2^n). В качестве такого поля можно взять $k_0(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n)$, где a_i, b_j - независимые переменные, и k_0 - любое поле характеристики $\neq 2$.

Утверждение 11.3 *Пусть $\mathrm{Quat}(a_1, b_1), \ldots, \mathrm{Quat}(a_n, b_n)$ - алгебры кватернионов над некоторым полем k. Тогда существует форма $q \in I^2(k)$ размерности $2n+2$, такая, что $C(q) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{Quat}(a_1, b_1) \otimes_k \ldots \otimes_k \mathrm{Quat}(a_n, b_n))$.*

Доказательство: Пусть p - это форма вида $\lambda \cdot \langle\langle a, b\rangle\rangle$. Тогда, например, по теореме 10.15(2), $C(p) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{Quat}(a, b))$. Та же теорема влечёт, что если $q, r \in I^2(k)$, то $c(q \perp r) = c(q) + c(r)$. Докажем индукцией по n, что существует $2n+2$-мерная форма $q \in I^2$, такая, что $q = \lambda_1 \cdot \langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle + \ldots + \lambda_n \cdot \langle\langle a_n, b_n\rangle\rangle$ в кольце Витта $W(k)$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть r - это $2n$-мерная форма такая, что $r = \lambda_1 \cdot \langle\langle a_1, b_1\rangle\rangle + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot \langle\langle a_{n-1}, b_{n-1}\rangle\rangle$ в $W(k)$. Пусть $-\lambda_n$ - это любое ненулевое значение r. Тогда форма $r \perp \lambda_n \cdot \langle\langle a_n, b_n\rangle\rangle$ - изотропна. Иными словами, $r \perp \lambda_n \cdot \langle\langle a_n, b_n\rangle\rangle = \mathbb{H} \perp q$. Очевидно, что q - это нужная нам форма.

Имеем: $c(q) = [\mathrm{Quat}(a_1, b_1)] + \ldots + [\mathrm{Quat}(a_n, b_n)]$. Учитывая размерности, получаем: $C(q) \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{Quat}(a_1, b_1) \otimes_k \ldots \otimes_k \mathrm{Quat}(a_n, b_n))$. $\square$

В частности, если $\mathrm{ind}(\mathrm{Quat}(a_1, b_1) \otimes_k \ldots \otimes_k \mathrm{Quat}(a_n, b_n)) = 2^n$, то соответствующая форма q будет анизотропной.

Построим теперь поле с u-инвариантом $2(n+2)$ как прямой предел k_∞ полей $k \subset k_1 \subset \ldots \subset k_i \subset \ldots$, где $k_i = \lim_{(q_1,\ldots,q_s)}(k_{i-1}(q_1)\ldots(q_s))$, где $(q_1, \ldots, q_s)$ пробегает все конечные наборы квадратичных форм над k_{i-1} размерности $2n+3$.

По построению, $u(k_\infty) \leq 2n+2$.

С другой стороны, форма $q|_{k_\infty}$ -анизотропна. Чтобы увидеть это - заметим, что если $\mathrm{ind}(C(q|_F)) = 2^n$, и r - некоторая форма над F размерности $2n+3$, то $\mathrm{ind}(C(q|_{F(r)})) = 2^n$. Действительно, по формуле Меркурьева, индекс мог бы понизиться только если для соответствующей алгебры с делением $D_{q|_F}$ выполняется: $D_{q|_F} \cong B \otimes_F C_0(r)$. Но $\dim_F(C_0(r)) = 2^{\dim(r)-1} = 2^{2n+2}$, в то время, как $\dim_F(D_{q|_F}) = 2^{2n}$. Значит, $\mathrm{ind}(C(q|_{F(r)})) = 2^n$, и $\mathrm{ind}(q|_{k_\infty}) = 2^n$. А это, как мы знаем, влечёт анизотррропность $q|_{k_\infty}$.