Лекция 4

K-теория Милнора

Напомним определение милноровской K-теории:

Определение 4.1 $K_*^M(k) := \mathrm{T}_{\mathbb{Z}}(k^*)/(a \otimes (1-a),\ a \in k \backslash 0, 1)$. *Для $a \in k^*$ мы будем обозначать через $\{a\}$ соответствующий элемент $\mathrm{K}_1^M(k) = k^*$. Через $\{a_1, \ldots, a_n\}$ мы будем обозначать $\{a_1\} \cdot \ldots \cdot \{a_n\} \in \mathrm{K}_n^M(k)$. Такой элемент (являющийся произведением элементов степени один) будет называться* **чистым символом**.

Таким образом, $K_*^M(k)$ является *квадратичной алгеброй* над $\mathbb{Z}$ (т.е. градуированным кольцом, порождённым своей градуировачной компонентой степени 1, где соотношения имеют степень 2).

Вот некоторые элементарные свойства милноровской K-теории:

Утверждение 4.2

(a) *Для любого $a \in k^*$ выполняется: $\{a, a\} = \{a, -1\}$.*

(b) *Кольцо $\mathrm{K}_*^M(k)$ является кососкоммутативным.*

Доказательство: (a) Так как 1 является "нулём" абелевой группы k^*, то чистые символы $\{1, 1\}$ и $\{1, -1\}$ в $\mathrm{K}_2^M(k)$ равны нулю. Поэтому, достаточно рассмотреть случай $a \in k \backslash 0, 1$. По определению $\mathrm{K}_*^M(k)$, мы имеем: $\{a, 1-a\} = 0 = \{1/a, 1-1/a\}$. Но с другой стороны, по билинейности, $\{1/a, 1-1/a\} = -\{a, 1-1/a\} = -\{a, (1-a)/(-a)\} = -\{a, 1-a\} + \{a, -a\}$. Стало быть, $\{a, -a\} = 0$. Так как $-a = a/(-1)$, то $\{a, a\} = \{a, -1\}$.

(b) По билинейности и пункту (a), $\{ab, ab\} = \{a, a\} + \{b, b\} + (\{a, b\} + \{b, a\}) = \{a, -1\} + \{b, -1\} + (\{a, b\} + \{b, a\}) = \{ab, -1\} + (\{a, b\} + \{b, a\}) = \{ab, ab\} + (\{a, b\} + \{b, a\})$. Что показывает, что $\{a, b\} + \{b, a\} = 0$. $\square$

Упражнение 4.1 *Обобщите соотношения $\{a, 1-a\} = 0 = \{a, -a\}$.*

(1) *Показать, что если $a_1, \ldots, a_n \in k^*$ и $a_1 + \cdots + a_n = 1$, то $\{a_1, \ldots, a_n\} = 0$.*

(2) *То же самое в предположении $a_1 + \cdots + a_n = 0$.*

В частности, мы получаем, что $\mathrm{K}^M(k)/2$ является коммутативным кольцом.

Примеры: 1) Пусть $\mathbb{F}_q$ - конечное поле из q элементов. Тогда $\mathrm{K}_1^M(\mathbb{F}_q) = \mathbb{Z}/(q-1)$. Вычислим $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)$. Имеем сюрьекцию $\mathbb{F}_q^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q^* \twoheadrightarrow \mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)$. Если a - это образуящая $\mathbb{F}_q^*$, то $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)$ будет циклической с образующей $\{a,a\}$. Так как $\{a,a\} = \{a,-1\}$, то этот элемент имеет порядок 1 или 2. Поэтому, $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q) \cong \mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)/2$. Так как уравнение $x^2 + y^2 = a$ имеет ненулевое решение над полем $\mathbb{F}_q$, то $\{a,-1\} = \{a/(x^2),-1\} = \{a/(x^2),(y/x)^2\} = 0$ в $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)/2$, а стало быть, и в $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q)$. Это показывает, что $\mathrm{K}_2^M(\mathbb{F}_q) = 0$, а значит, и $\mathrm{K}_n^M(\mathbb{F}_q)$, $n \geq 2$ - нулевые.

2) Вычислим $\mathrm{K}_*^M(\mathbb{R})/2$. Так как $\mathbb{R}^*/2 = \mathbb{Z}/2$ с образующей (-1), то $\mathrm{T}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{R}^*/2) = \mathbb{Z}/2[t]$, где $t = \{-1\}$. С другой стороны, элемент вида $a \otimes (1-a)$ является 2-делимым в $(\mathbb{R}^*/2)^{\otimes 2}$, так как одно из чисел $a, 1-a$ - положительно. Поэтому, $\mathrm{K}_*^M(\mathbb{R})/2 \cong \mathrm{T}_{\mathbb{Z}/2}(\mathbb{R}^*/2) \cong \mathbb{Z}/2[t]$, где $t = \{-1\}$.

Цепочная эквивалентность форм

Определение 4.3 *Пусть $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ и $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ - это два представления одной и той же формы q в диагональном виде. Мы назовём эти две диагонализации элементарно эквивалентными, если существуют $1 \leq i,j \leq n$ такие, что $a_l = b_l$ для любого $l \neq i,j$. Мы назовём диагонализации $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ и $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ цепочно эквивалентными (обозначение $\stackrel{\text{цеп}}{\backsim}$), если существует цепочка диагонализаций $\langle c_{1,1},\ldots,c_{1,n}\rangle,\ldots,\langle c_{N,1},\ldots,c_{N,n}\rangle$ такая, что $c_{1,i} = a_i$, $c_{N,j} = b_j$ и соседние диагонализации элементарно эквивалентны.*

Теорема Витта о цепочной эквивалентности *Любые две диагонализации одной невырожденной формы q цепочно эквивалентны.*

Доказательство: Используем индукцию по размерности формы (n). При $n \leq 2$ утверждение тривиально. Пусть $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ и $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ - это два представления n-мерной формы q. В частности, a_1 является значением q, и представляется в виде $a_1 = b_1 \cdot x_1^2 + \cdots + b_n \cdot x_n^2$. Выберем среди всех таких представлений то, в котором минимальное число ненулевых x_i. Выбросив в нём все нулевые члены, мы получаем: $a_1 = b_{i_1} \cdot x_{i_1}^2 + \cdots + b_{i_s} \cdot x_{i_s}^2$. Так как симметрическая группа S_n порождена транспозициями, то для любой перестановки σ диагонализация $\langle b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(n)}\rangle$ будет цепочно-эквивалентной диагонализации $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$. В частности, заменяя $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ на цепочно-эквивалентное ему, мы можем считать, что $i_l = l$ для любого $1 \leq l \leq s$. Теперь мы можем использовать индукцию по s. При $s = 1$ мы получаем: $a_1 = b_1 \cdot x_1^2$, и диагонализации $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ и $\langle a_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ цепочно-эквивалентны. По теореме Витта о сокращении, диагонализации $\langle b_2, \ldots, b_n \rangle$ и $\langle a_2, \ldots, a_n \rangle$ представляют одну и ту же форму. По индуктивному предположению внешней (n) индукции, $\langle b_2, \ldots, b_n \rangle$ и $\langle a_2, \ldots, a_n \rangle$ цепочно-эквивалентны. Следовательно, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \overset{\text{цеп}}{\backsim} \langle a_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \overset{\text{цеп}}{\backsim} \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$. Пусть теперь $s > 1$. Положим $b_1' := b_1 \cdot x_1^2 + b_2 \cdot x_2^2$ и $b_2' := b_2^{-1} \cdot x_1^2 + b_1^{-1} \cdot x_2^2$. Заметим, что по выбору x_i, $b_1' \neq 0$. Так как диагонализации $\langle b_1, b_2 \rangle$ и $\langle b_1', b_2' \rangle$ представляют одну и ту же форму (проверьте это!), то $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle \overset{\text{цеп}}{\backsim} \langle b_1', b_2', b_3, \ldots, b_n \rangle$. Но $a_1 = b_1' + b_3 \cdot x_3^2 + \ldots b_s \cdot x_s^2$. По индуктивному предположению внутренней (s) индукции, $\langle b_1', b_2', b_3, \ldots, b_n \rangle \overset{\text{цеп}}{\backsim} \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. □

Следствие 4.5 *Кольцо Витта-Гротендика поля k можно задать образующими и соотношениями следующим образом: Образующие: $\langle a \rangle$, $a \in k^*$. Соотношения: 1) $\langle x^2 \rangle = 1$; 2) $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle c \rangle + \langle d \rangle$ для любых a, b, c, d таких, что $a \cdot b \cdot c \cdot d \in (k^*)^2$ и существуют $x, y \in k$ такие, что выполняется $c = a \cdot x^2 + b \cdot y^2$; 3) $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle = \langle ab \rangle$.*

Доказательство: Обозначим через R кольцо, заданное указанным образом. Имеем очевидное отображение $\rho : R \to \tilde{W}(k)$, $\langle a \rangle \mapsto$ в класс одномерной формы $\langle a \rangle$. Для проверки корректности такого отображения, заметим, что соотношения второго типа в точности описывают, когда две двумерных диагонализации представляют одну и ту же форму (докажите это!), а соотношения третьего типа соответствуют закону умножения в $\tilde{W}(k)$. Ясно, что ρ - сюрьективно. Пусть $u \in \mathrm{Ker}(\rho)$. u имеет вид $\sum_{i=1}^{s} \langle a_i \rangle - \sum_{j=1}^{t} \langle b_j \rangle$. Тогда $\rho(u) = [\langle a_1, \ldots, a_s \rangle] - [\langle b_1, \ldots, b_t \rangle]$. По определению $\tilde{W(k)}$ и теореме Витта о сокращении, такой элемент равен нулю тогда и только тогда, когда квадратичные формы $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ и $\langle b_1, \ldots, b_t \rangle$ изоморфны (в частности, $s = t$). По предыдущей теореме, диагонализации $\langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ и $\langle b_1, \ldots, b_s \rangle$ цепочно эквивалентны. Но последнее означает, что в R элементы $\sum_{i=1}^{s} \langle a_i \rangle$ и $\sum_{j=1}^{s} \langle b_j \rangle$ равны (так как соотношения первого и второго типа описывают изоморфизм одномерных и двумерных форм, соответственно). Значит, ρ также и инъективен. □

Классы Штифеля-Уитни

Обозначим через $\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$ произведение $\prod_{n\geq 0}\mathrm{K}^M_n(k)/2$. Определим некоторый инвариант квадратичных форм со значениями в $\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$.

Определение 4.6 *Пусть $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ - это некоторая диагонализация квадратичной формы q. Определим полный класс Штифеля-Уитни этой диагонализации как элемент $(\prod_{i=1}^n(1+\{a_i\}))^{-1}\cdot(1+\{-1\})^{[n/2]}\in\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$.*

Утверждение 4.7

1) *Полный класс Штифеля-Уитни не зависит от выбора диагонализации данной формы q. Таким образом, мы получаем инвариант $sw(q)\in\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$.*

2) *$sw(\mathbb{H})=1$. Таким образом, $sw(q)$ зависит только от класса формы q в $W(k)$.*

3) *Если $q\in W(k)$ и $p\in I(W(k))$, то $sw(q)\cdot sw(p)=sw(p\perp q)$. В частности, sw задаёт гомоморфизм адитивной группы $I(W(k))$ в мультипликативную группу $\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$.*

Доказательство: 1) Очевидно, достаточно показать, что выражение $\prod_{i=1}^n(1+\{a_i\})\in\hat{\mathrm{K}}^M_*(k)/2$ не зависит от выбора диагонализации. По теореме Витта о цепочной эквивалентности, достаточно показать, что указанные выражения совпадают для любой пары элементарно эквивалентных диагонализаций. А для этого достаточно показать, что они совпадают для двух диагонализаций одной двумерной квадратичной формы. Пусть $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$. Нужно показать, что $(1+\{a\})\cdot(1+\{b\})$ совпадает с $(1+\{c\})\cdot(1+\{d\})$. Иными словами, что $1+\{ab\}+\{a,b\}$ равно $1+\{cd\}+\{c,d\}$. Так как $(ab)/(cd)\in(k^*)^2$, то $\{ab\}=\{cd\}\in\mathrm{K}^M_1(k)/2$. Чтобы показать равенство членов степени 2, заметим, что существуют $x,y\in k$ такие, что $c=a\cdot x^2+b\cdot y^2$ (так как c является значением формы). Так как ab и cd совпадают по модулю квадратов в k, то $d=abcz^2$ для некоторого $z\in k^*$. В $\mathrm{K}^M_*(k)/2$ мы имеем: $\{c,d\}=\{ax^2+by^2,abz^2(ax^2+by^2)\}=\{ax^2+by^2,-abz^2\}+\{ax^2+by^2,-(ax^2+by^2)\}=\{ax^2+by^2,-abz^2\}$ (т.к. $\{f,-f\}=0\in\mathrm{K}^M_2(k)$) $=\{ax^2+by^2,-ab\}$ (т.к. работаем по модулю 2). Либо x, либо $y\neq 0$ (т.к. $c\neq 0$) - пусть, для определённости, $x\neq 0$. Тогда: $\{ax^2+by^2,-ab\}=\{ax^2,-ab\}+\{1-(-by^2/(ax^2)),-ab\}=\{a,-ab\}+\{1-(-by^2/(ax^2)),-ab\cdot(y/ax)^2\}=\{a,-a\}+\{a,b\}$ (т.к. $\{g,1-$

$g\} = 0 \in \mathrm{K}_2^M(k)) = \{a, b\}$ (т.к. $\{f, -f\} = 0 \in \mathrm{K}_2^M(k)$). Стало быть, $\{a, b\} = \{c, d\} \in \mathrm{K}_2^M(k)/2$.

2),3) Очевидно. $\square$