Лекция 5

Гомоморфизм Милнора в градуировке 2

Легко видеть, что первый класс Штифеля-Уитни $sw_1 : W(k) \to \mathrm{K}_1^M(k)/2$ совпадает с $\det_{\pm}$ и поднимается до обратного отображения к отображению φ_1. Оказывается, что и второй класс Штифеля-Уитни выполняет подобную функцию.

Теорема 5.1 (Милнор) *Отображение $\varphi_2 : \mathrm{K}_2^M(k)/2 \to \mathrm{gr}^2_{I^\cdot}(W(k))$ является изоморфизмом. Обратное к нему задается вторым классом Штифеля-Уитни sw_2.*

Доказательство: Напомним, что n-кратной Пфистеровой формой называется форма $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle := \langle 1, -a_1\rangle \cdot \ldots \cdot \langle 1, -a_n\rangle$. Так как в $W(k)$ мы имеем равенство $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle = \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle + \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n\rangle\rangle - \langle\langle a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \cdot a_n\rangle\rangle$, то $sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle) =$
$= sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle\rangle) \cdot sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-2}, a_n\rangle\rangle)/sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \cdot a_n\rangle\rangle)$.

Упражнение 5.1

1) *Показать, что* $sw(\langle\langle a\rangle\rangle) = 1 + \{a\}$.

2) *Вывести отсюда, что при* $n \geq 2$,
$sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle) = 1 + \{a_1, \ldots, a_n\} \cdot \{-1\}^{2^{n-1}-n}$

В частности, мы получаем, что $sw_2(\langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle) = 0$. С другой стороны, $sw_1(\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle) = 0$ и $sw_2(\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle) = \{a_1, a_2\}$. Так как I^3 адитивно порождено $\langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle$, а I^2 адитивно порождено $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$, то sw_2 задаёт корректно определённый гомоморфизм абелевых групп $I^2/I^3 \to \mathrm{K}_2^M(k)/2$, такой, что $sw_2 \circ \varphi_2 = id_{\mathrm{K}_2^M(k)/2}$. Так как φ_2 - сюрьективно, то оно является изоморфизмом. $\square$

К сожалению, подобный метод не работает при $n \geq 3$. Связано это с тем, что умножение на $\{-1\}$, как правило, не является инъективным отображением (так, если -1 является квадратом в поле k, то это отображение - нулевое). И, стало быть, (даже) полный класс Штифеля-Уитни $sw(\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle)$ не несёт всей информации об исходном чистом символе $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Формы Пфистера

Как мы видели на первой лекции, формы $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ и $x_1^2 + \ldots + x_8^2$ обладают билинейными законами композиции. Оказывается, что и более широкий класс форм обладает тем же свойством.

Пусть $(A, ^-, N : A \to k)$ - это алгебра с инволюцией (антиавтоморфизмом) и нормой (в поле k), и a - это некоторый элемент A. Мы можем построить новую алгебру с инволюцией и нормой $(B, ^-, N : B \to k)$ по следующему правилу: как абелева группа, $B = A \oplus A$, где $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 + a \cdot y_2 \cdot \overline{y_1}, \overline{x_1} \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$, $\overline{(x, y)} := (\overline{x}, -y)$ и $N((x, y)) := N(x) - a \cdot N(y)$.

Возьмём в качестве $(A, ^-, N)$ тройку $(k, id_k, x^2 : k \to k)$, где k - это поле. Пусть $a, b, c \in k^*$. Последовательно применяя вышеуказанную конструкцию с параметрами a, b и c, мы получаем тройки $(A(a), ^-, N_{A(a)})$, $(A(a, b), ^-, N_{A(a,b)})$ и $(A(a, b, c), ^-, N_{A(a,b,c)})$.

Легко видеть, что в первом случае мы имеем квадратичное расширение $k\sqrt{a}$ с инволюцией $\overline{x + \sqrt{a} \cdot y} := x - \sqrt{a} \cdot y$ и нормой $N(x + \sqrt{a} \cdot y) := N_{k\sqrt{a}/k}(x + \sqrt{a} \cdot y) = x^2 - a \cdot y^2$. В частности, норма будет мультипликативной. Оказывается, что это свойство сохраняется и для $N_{A(a,b)}$ и $N_{A(a,b,c)}$. В результате мы получаем квадратичные формы с билинейным законом композиции.

Упражнение 5.2

1) *Показать, что $A(a, b)$ изоморфна алгебре $\mathrm{Quat}(a, b) := k < u, v > /(u^2 = a, v^2 = b, uv + vu = 0)$ (такая алгебра называется **обобщённой алгеброй кватернионов**, а $N_{A(a,b)}$ - **редуцированной нормой** в ней). Показать, что $N_{A(a,b)}$ мультипликативна.*

2) *Показать, что $N_{A(a,b)}$ является квадратичной формой $\langle 1, -a \rangle \cdot \langle 1, -b \rangle = \langle\langle a, b \rangle\rangle$. Показать, что формы $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ и $\langle 1, -a, -b \rangle$ изотропны одновременно.*

3) *Показать, что если $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ анизотропна, то $\mathrm{Quat}(a, b)$ - это алгебра с делением (а так как она ассоциативна, то и **тело**).*

4) *Показать, что если $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ изотропна, то $\mathrm{Quat}(a, b)$ изоморфна матричной алгебре $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(k)$ (использовать (2)). Показать, что в этом случае $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ будет и гиперболичной.*

5) *Показать, что $N_{A(a,b,c)}$ мультипликативна (алгебра $A(a, b, c)$ называется **обобщённой алгеброй октав**, она не будет ассоциативной).*

Показать, что эта норма является квадратичной формой, изоморфной $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$.

На самом деле, квадратичные формы вида $\langle\langle a\rangle\rangle$, $\langle\langle a,b\rangle\rangle$ и $\langle\langle a,b,c\rangle\rangle$ - это в точности все формы допускающие билинейный закон композиции. Вместе с тем, n-кратная форма Пфистера $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle$ наследует многие хорошие свойства редуцированных норм в квадратичном расширении поля, алгебре кватернионов и алгебре октав.

Основным свойством, характеризующим n-кратные формы Пфистера является следующее (ср. Упр. 5.2 (4)): $\langle\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle$ изотропна тогда и только тогда, когда она гиперболична. Для доказательства этого факта нам понадобятся *трансферы Шарлау*

Трансферы Шарлау

Для произвольного расширения полей E/k определён естественный функтор ограничения квадратичных форм с k на E, который задаёт кольцевой гомоморфизм $j_{E/k} : W(k) \to W(E)$.

Если же E/k - это конечное расширение полей, то существуют естественные функторы и в противоположном направлении.

Определение 5.2 *Пусть $[E:k]<\infty$, и $s : E \to k$ - это некоторое ненулевое ($\Leftrightarrow$ сюрьективное) k-линейное отображение. Для квадратичной формы $q : V \to E$, её трансфером Шарлау $s_*(q)$ называется квадратичная форма над k, определённая композицией $V \xrightarrow{q} E \xrightarrow{s} k$, где V рассматривается как векторное пространство над k.*

Вот некоторые элементарные свойства трансферов.

Теорема 5.3

(0) *Если q - невырождена, то $s_*(q)$ - также невырождена.*

(1) $\dim(s_*(q)) = [E:k]\cdot\dim(q)$.

(2) $s_*(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\perp\ldots\perp\mathbb{H}$. *В частности, s_* поднимается до корректно-определённого отображения на $W(E)$.*

(3) *(Формула проэкции) $s_*(q\cdot j_{E/k}(p)) = s_*(q)\cdot p$. Это означает, что гомоморфизм $s_* : W(E)\to W(k)$ является гомоморфизмом $W(k)$-модулей. В частности, $s_*(j_{E/k}(p)) = s_*(1)\cdot p$.*

(4) Если $E = k\sqrt{a}$ *и* $s(x + \sqrt{a} \cdot y) = c \cdot x + d \cdot y$, *то*

$$s_*(1) = \begin{cases} c \cdot \langle 1, -N_{k\sqrt{a}/k}(d + \sqrt{a} \cdot c)\rangle, \text{ если } c \neq 0; \\ \mathbb{H}, \text{ если } c = 0. \end{cases}$$

Доказательство: (0) Так как q - невырождена, то для любого $v \in V_q$ отображение $V_q \to E$, $u \mapsto q(u, v)$ будет ненулевым, а потому - сюрьективным. Значит, и отображение $u \mapsto s(q(u, v))$ будет ненулевым, что означает невырожденность формы $s_*(q)$.

(1),(2),(3) - Очевидно.

(4) Видно, что $s(u + \sqrt{a} \cdot v) = c(u^2 + av^2) + 2duv$, и последняя форма изоморфна $c \cdot \langle 1, c^2 a - d^2\rangle$ при $c \neq 0$ и $\mathbb{H}$ при $c = 0$. $\square$