Лекция 6

Используя технику трансферов Шарлау, мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 6.1 *Пусть* $p := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ *- это Пфистерова форма. Тогда* p *изотропна если и только если она гиперболична.*

Доказательство: Очевидно, достаточно доказать, что изотропность $\Rightarrow$ гиперболичность. Используем индукцию по n. При $n = 1$ доказывать нечего. Пусть утверждение верно для $n-1$, и $q := \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle\rangle$, стало быть, $p = q \cdot \langle 1, -a_n \rangle = q \perp -a_n \cdot q$. Если p - изотропна, то существуют такие (неравные одновременно нулю) $x, y \in V_q$, что $q(x) - a_n \cdot q(y) = 0$. Имеется две возможности: 1) x и y линейно зависимы; 2) размерность линейной оболочки $L(x, y)$ равна 2-ум. В первом случае, либо x, y - изотропные вектора формы q, и тогда q гиперболична по предположению индукции, а стало быть, и $p = q \cdot \langle\langle a_n \rangle\rangle$ - гиперболична, либо же $q(x) \neq 0$, $y = \lambda \cdot x$, и значит, $a_n = \lambda^2$, т.е. $\langle\langle a_n \rangle\rangle$ и $p = q \cdot \langle\langle a_n \rangle\rangle$ - гиперболичны. Во втором случае, мы получаем двумерную подформу $r := q|_{L(x,y)}$ в форме q. Мы можем предполагать, что r - невырождена и анизотропна (иначе, по предположению индукции, q и p будут гиперболичны), тогда $r = \mu \cdot \langle 1, -b \rangle$ для некоторых $\mu, b \in k^*$. В пространстве V_r мы имеем вектора x и y такие, что $r(x) \neq 0 \neq r(y)$ и $r(x)/r(y) = a_n$. Отождествляя V_r с $V_{\langle\langle b \rangle\rangle}$ (где $\langle\langle b \rangle\rangle = r/\mu$), мы получаем, что $\langle\langle b \rangle\rangle(x)/\langle\langle b \rangle\rangle(y) = a_n$, и $a_n \in image(Nrm : k\sqrt{b} \to k)$. Пусть $a_n = Nrm_{k\sqrt{b}/k}(d + c\sqrt{b})$, тогда определим k-линейное отображение $s : k\sqrt{b} \to k$ формулой $u + v \cdot \sqrt{b} \to cu + dv$. Если $c = 0$, то $a_n \in (k^*)^2$ и p - гиперболична, если же $c \neq 0$, то по пункту (4) предыдущей теоремы, $s_*(\langle 1 \rangle) = c \cdot \langle\langle a_n \rangle\rangle$, а по пункту (3), $s_*(j_{k\sqrt{b}/k}(q)) = q \cdot c\langle\langle a_n \rangle\rangle = c \cdot p$. Но над полем $k\sqrt{b}$ форма $j_{k\sqrt{b}/k}(q)$ будет изотропной (так как её подформа $j_{k\sqrt{b}/k}(r)$ гиперболична), и по предположению индукции, $j_{k\sqrt{b}/k}(q)$ - гиперболична. По пункту (2) предыдущей теоремы, $s_*(j_{k\sqrt{b}/k}(q))$, а стало быть, и p - гиперболична. $\square$

Это свойство пфистеровых форм имеет много следствий.

Определение 6.2 *Мы будем обозначать через* $D_k(q)$ *(или просто через* $D(q)$*, если это не вызывает путаницы) множество значений формы* q *над полем* k*, а через* $G_k(q)$ *(или* $G(q)$*) так называемый мультипликатор* q*, т.е. множество всех тех* $\lambda \in k^*$*, что* $q = \lambda \cdot q$ *(иначе говоря,* $\langle\langle \lambda \rangle\rangle \cdot q$ *- гиперболична).*

Следствие 6.3 *$D(\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle) = G(\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle)$. В частности, множество значений пфистеровой формы является подгруппой в k^*.*

Доказательство: Очевидно, что для любой формы q, представляющей число 1 (в том числе и для $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$), $G(q) \subset D(q)$. Пусть теперь $\lambda \in D(\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle)$. Тогда форма $\langle\langle a_1,\dots,a_n,\lambda\rangle\rangle$ - изотропна (т.к. $\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ представляет и λ и 1). По теореме 6.1, $\langle\langle a_1,\dots,a_n,\lambda\rangle\rangle$ - гиперболична. Значит, $\lambda \in G(\langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle)$. □

Теорема 6.4 *Пусть $\pi = \langle\langle a_1,\dots,a_n\rangle\rangle$ - пфистерова форма над k, и $p \subset \pi$ - подформа, такая что $\dim(p) > 2^{n-1} = \dim(\pi)/2$. Тогда для любого расширения полей E/k, форма $\pi|_E$ изотропна если и только если форма $p|_E$ - изотропна.*

Доказательство: Так как $p \subset \pi$, то из изотропности p следует таковая для π. Обратно, пусть π - изотропна. Тогда, по теореме 6.1, она гиперболична, т.е. в пространстве V_π имеется изотропное подпространство U размерности $\dim(\pi)/2$. Так как $\dim(V_p) + \dim(U) > \dim(V_\pi)$, то V_p содержит изотропный вектор. □

Определение 6.5 *Форма вида $\lambda \cdot p$, где p подформа пфистеровой формы π размерности $> \dim(\pi)/2$ и $\lambda \in k^*$, называется соседом пфистеровой формы π. Из теоремы 6.4 следует, что изотропность соседа равносильна изотропности самой формы π.*

Упражнение 6.1

(1) *Показать, что s-инвариант поля ($= \max(n : \sum_{i=1}^n x_i^2$ не представляет $0)$) может принимать только значения вида 2^n (и ∞) (рассмотреть пфистерову форму $\langle\langle -1,\dots,-1\rangle\rangle$).*

(2) *Показать, что u-инвариант поля k ($= \max(n :$ над q есть аниз. форма разм. $n)$) не может быть равен 3 (показать, что любая 3-х мерная форма является соседом некоторой 2-кратной формы Пфистера).*

Упражнение 6.2

(1) *Пусть q - анизотропная форма над k, т.ч. $q|_{k\sqrt{a}}$ - изотропна. Тогда существует $\lambda \in k^*$, т.ч. $\lambda \cdot \langle\langle a\rangle\rangle$ - подформа в q.*

(2) *Пусть q - анизотропная форма над k, т.ч. $q|_{k\sqrt{a}}$ - гиперболична. Тогда существует форма p над k, т.ч. $q = p \cdot \langle\langle a\rangle\rangle$.*

(3) *Пусть* $\tilde{tr} : k\sqrt{a} \to k$ *- это* k*-линейное отображение* $x + \sqrt{a} \cdot y \mapsto y$. *Пусть* $c + d\sqrt{a} \in (k\sqrt{a})^*$. *Показать, что*

$$\tilde{tr}_*(\langle c + d\sqrt{a}\rangle) = \begin{cases} d \cdot \langle\langle Nrm_{k\sqrt{a}/k}(c + d\sqrt{a})\rangle\rangle, \text{ если } d \neq 0 \\ \mathbb{H}, \text{ если } d = 0. \end{cases}$$

(4) *Пусть* q *- анизотропная форма над* k*, т.ч.* $q \cdot \langle\langle a\rangle\rangle$ *- изотропна. Тогда существуют* $u \in (k\sqrt{a})^*, \mu \in k^*$*, т.ч.* q *содержит подформу, изоморфную* $\mu \cdot \langle\langle Nrm_{k\sqrt{a}/k}(u)\rangle\rangle$.

(5) *Пусть* q *- анизотропная форма над* k*, т.ч.* $q \cdot \langle\langle a\rangle\rangle$ *- гиперболична. Тогда существует форма* r *над* $k\sqrt{a}$*, т.ч.* $\tilde{tr}_*(r) = q$.

(6) *Пусть* q *- анизотропная форма над* $k\sqrt{a}$*. Показать, что если* $\tilde{tr}_*(q)$ *- изотропна, то существует* $b \in k^*$*, т.ч.* $\langle b\rangle$ *- подформа в* q.

(7) *Пусть* q *-анизотропная форма над* $k\sqrt{a}$*, т.ч.* $\tilde{tr}_*(q)$ *- гиперболична. Тогда* $q = j_{k\sqrt{a}/k}(p)$ *для некоторой формы* p *над* k.

Объединяя (2),(5) и (7), мы получаем точную последовательность (так называемую, точную пару - см. С.И.Гельфанд, Ю.И.Манин:"Методы Гомологической Алгебры", том I, Глава III, §7, Упр.(3a) (стр. 251))

$$\begin{array}{lcl} W(k) & \xrightarrow{\cdot\langle\langle a\rangle\rangle} & W(k) \\ \tilde{tr}_* \uparrow & \swarrow & j_{k\sqrt{a}/k} \\ W(k\sqrt{a}) & & \end{array}$$

Для доказательства дальнейших свойств пфистеровых форм нам понадобится следующий важный результат.

Теорема Касселса-Пфистера

Лемма 6.6 *Если форма* q *над полем* k *- анизотропна, то и форма* $q|_{k(x)}$ *- анизотропна.*

Доказательство: Пусть $q = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$. Так как q представляет ноль над $k(x)$, то она представляет его и над $k[x]$ (привести к общему знаменателю). Пусть f_i, $i = 1, \dots, n$ - это такие полиномы из $k[x]$, что $\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i^2 = 0$. Сокращая на x при необходимости, мы можем считать, что не все f_i-ые делятся на x. Тогда вектор $(f_1(0), \dots, f_n(0)) \in V_q$ будет ненулевым и изотропным. $\square$

Теорема 6.7 (Касселс-Пфистер) *Пусть π - это форма над полем k, и $p(x) \in k[x]$ является значением формы $\pi|_{k(x)}$. Тогда $p(x)$ представляется формой π и над кольцом $k[x]$.*

Доказательство: Если форма π - изотропна, то $\mathbb{H} \subset \pi$, а форма $\mathbb{H}$ представляет в $k[x]$ все элементы (проверьте это). Поэтому, мы можем считать π анизотропной. Так как $p(x)$ - значение формы π в $k(x)$, то существует $f \in V_\pi \otimes_k k[x]$ и $0 \neq f_0 \in k[x]$, такие что $\pi(f/f_0) = p(x)$ (иными словами, если $\pi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то $f = (f_1, \dots, f_n)$, где $f_i \in k[x]$ и $\sum_{i=1}^n a_i \cdot (f_i/f_0)^2 = p(x)$). Если мы определим форму $\tilde{\pi}$ над кольцом $k[x]$ как $\pi \perp -\langle p(x) \rangle$, то для $(f, f_0) \in (V_\pi \otimes_k k[x]) \oplus k[x] = V_{\tilde{\pi}}$ мы имеем: $\tilde{\pi}((f, f_0)) = 0$. Так как π - анизотропна, то, по лемме, $\pi|_{k(x)}$, а стало быть, и $\pi|_{k[x]}$ - анизотропна. Это означает, что нам достаточно найти такой вектор $(f, f_0) \in V_{\tilde{\pi}}$, что $deg(f_0) = 0$ и $\tilde{\pi}((f, f_0)) = 0$ (тогда f_0 будет автоматически ненулевым). Для доказательства последнего нам достаточно проверить, что если $deg(f_0) > 0$, то всегда существует изотропный вектор (h, h_0) такой, что $deg(h_0) < deg(f_0)$. Обозначим $\overline{f} := (f, f_0) = (f_1, \dots, f_n, f_0)$, где $f_i \in k[x]$ - координаты. Разделим f_i с остатком на f_0: $f_i = g_i \cdot f_0 + r_i$, где $g_i, r_i \in k[x]$ и $deg(r_i) < deg(f_0)$. Обозначим: $\overline{g} := (g_1, \dots, g_n, 1)$ и $\overline{r} := (r_1, \dots, r_n, 0)$. Положим $(h, h_0) = \overline{h} := \tilde{\pi}(\overline{g}) \cdot \overline{f} - 2\tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}) \cdot \overline{g}$. Тогда: $\tilde{\pi}(\overline{h}) = \tilde{\pi}(\overline{f}) \cdot \tilde{\pi}(\overline{g}) - 4\tilde{\pi}(\overline{g}) \cdot \tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}) \cdot \tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}) + 4(\tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}))^2 \cdot \tilde{\pi}(\overline{g}) = 0$ (т.к. $\tilde{\pi}(\overline{f}) = 0$). Стало быть, $\overline{h}$ - изотропный вектор. С другой стороны, $h_0 \cdot f_0 = \tilde{\pi}(\overline{g}) \cdot f_0^2 - 2\tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}) \cdot f_0 = \tilde{\pi}(\overline{g}) f_0^2 - 2\tilde{\pi}(\overline{f}, \overline{g}) \cdot f_0 + \tilde{\pi}(\overline{f})$ (т.к. $\tilde{\pi}(\overline{f}) = 0$) $= \tilde{\pi}(\overline{f} - f_0 \cdot \overline{g}) = \tilde{\pi}(\overline{r})$. Но $\tilde{\pi}(\overline{r}) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot r_i^2$ и $deg(r_i) < deg(f_0)$. Поэтому, $deg(h_0) < deg(f_0)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 6.8 *Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)/g(x_1, \dots, x_n) \in k(x_1, \dots, x_n)^*$ и $(e_1, \dots, e_n) \in k^{\times n}$ - такая n-ка чисел, что $g(e_1, \dots, e_n) \neq 0$. Пусть q - квадратичная форма над k такая, что $q|_{k(x_1, \dots, x_n)}$ представляет u. Тогда q представляет $u(e_1, \dots, e_n) \in k$.*

Доказательство: Индукция по n. При $n = 0$ доказывать нечего. Переход $(n-1) \to n$. Обозначим $E := k(x_1, \dots, x_{n-1})$. Так как $g(e_1, \dots, x_n) \neq 0$, то достаточно показать, что q представляет $u(\overline{e}) \cdot (g(\overline{e}))^2 = f(\overline{e}) \cdot g(\overline{e})$. Таким образом, мы можем считать u полиномом. Пусть $q = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$. Элемент u может быть рассмотрен как полином $\tilde{u}$ от x_n с коэффициентами в E. Так как $q|_{E(x_n)}$ представляет $\tilde{u}(x_n)$, то по теореме Касселса-Пфистера, существуют многочлены $h_1(x_n), \dots, h_m(x_n) \in E[x_n]$

такие, что $\tilde{u}(x_n) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_i(x_n)^2$. В частности, $\tilde{u}(e_n) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot h_i(e_n)^2 \in D_E(q|_E)$. А по индуктивному предположению, это означает, что $u(e_1, \ldots, e_n) \in D_k(q)$. $\square$

Теорема Касселса-Пфистера влечёт многие другие результаты.

Теорема 6.9 *Пусть $\varphi = \langle a_2, \ldots, a_n \rangle$, $\gamma = \varphi \perp \langle a_1 \rangle$ - это формы над k, и γ - анизотропна. Пусть $d \in k^*$. Тогда $d \in D_k(\varphi) \Leftrightarrow d + a_1 \cdot x^2 \in D_{k(x)}(\gamma|_{k(x)})$.*

Доказательство: Очевидно, что если $d \in D_k(\varphi)$, то $d + a_1 \cdot x^2 \in D_{k(x)}(\gamma|_{k(x)})$. В другую сторону, если $d + a_1 \cdot x^2 \in D_{k(x)}(\gamma|_{k(x)})$, то по теореме Касселса-Пфистера, существуют такие полиномы $f_1, \ldots, f_n$, что $\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i^2 = d + a_1 \cdot x^2$. Пусть $m = \max(deg(f_i), i = 1, \ldots, n)$ и b_i - коэффициент f_i при x^m. Тогда вектор $(b_1, \ldots, b_n)$ - ненулевой. Так как γ - анизотропна, то $\sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i^2 \neq 0$. Это означает, что старшие члены сократиться не могут, и стало быть, $m \leq 1$, т.е. f_i-ые - это линейные полиномы. Пусть $f_i = c_i + b_i \cdot x$. Пусть x_0 - это одно из решений уравнения: $c_1 + b_1 \cdot x = \pm x$ (оно всегда существует). Тогда из равенства: $\sum_{i=1}^n a_i(c_i + b_i x)^2 = a_1 x^2 + d$ мы получаем: $a_1(c_1 + b_1 x_0)^2 + \sum_{i=2}^n a_i(c_i + b_i x_0)^2 = a_1 x_0^2 + d$, что влечёт: $\sum_{i=2}^n a_i(c_i + b_i x_0)^2 = d$, т.е. $d \in D_k(\varphi)$. $\square$

Упражнение 6.3 *Показать, что Теорема 6.9 не верна без предположения об анизотропности γ.*

Определение 6.10 *Пусть φ и γ - это формы над полем k размерностей n и m, соответственно. Обозначим $X := (x_1, \ldots, x_n)$ и $k(X) := k(x_1, \ldots, x_n)$. Это поле мы будем также обозначать $k(V_\varphi)$. Мы скажем, что γ **доминирует** φ (обозначение: $\gamma \succ \varphi$), если общее значение $\varphi(X) \in k(X)^*$ формы φ принадлежит $D_{k(X)}(\gamma)$.*

Мы получаем следующий любопытный критерий вложимости одной формы в другую:

Теорема 6.11 *Пусть γ и φ - это формы над k, причём γ анизотропна. Тогда $\gamma \succ \varphi \Leftrightarrow \varphi$ изоморфна подформе в γ.*

Доказательство: Ясно, что если $\varphi \subset \gamma$, то $\gamma \succ \varphi$. Пусть теперь $\gamma \succ \varphi$. Мы используем индукцию по $m = \dim(\gamma)$. При $m = 0$ - доказывать нечего. Пусть $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $F := k(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $E := F(x_n)$.

Мы имеем: $a_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i x_i^2 \in D_E(\gamma|_E)$. Возьмём $\overline{e} = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда, по Следствию 6.8, $\varphi(\overline{e}) = a_1$ должно лежать в $D_k(\gamma)$. Значит, $\gamma = \langle a_1 \rangle \perp \gamma'$, где γ' - некоторая форма размерности $m - 1$. Так как $a_1 x_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i x_i^2 \in D_{F(x_n)}(\langle a_1 \rangle \perp \gamma'|_{F(x_n)})$, то по Теореме 6.9, $\sum_{i=2}^n a_i x_i^2 \in D_F(\gamma'|_F)$. То есть, $\gamma' \succ \langle a_2, \ldots, a_n \rangle$ и, по предположению индукции,

$\langle a_2, \ldots, a_n\rangle$ - подформа в γ'. Ну а тогда $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ - подформа в γ. $\square$

Следствие 6.12 *Пусть φ и γ - формы над k, причём γ - анизотропна, а φ - n-мерна. Пусть $\varphi(X) \in k(X)^* = k(x_1, \ldots, x_n)$ - общее значение φ. Предположим, что $\varphi(X) \in G_{k(X)}(\gamma|_{k(X)})$. Тогда для любого $a \in D_k(\gamma)$, форма $a \cdot \varphi$ будет подформой в γ.*

Доказательство: Рассмотрим форму $\mu := a \cdot \gamma$. Тогда μ представляет 1 над k, и $G_{k(X)}(\mu) = G_{k(X)}(\gamma) \ni \varphi(X)$. Значит, $\mu \succ \varphi$ и $\gamma \succ a \cdot \varphi$. $\square$

Определение 6.13 *Пусть $\varphi = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ - форма над k и $n \geq 2$. Обозначим через $k(\varphi)$ поле $k(x_1, \ldots, x_{n-1})[x_n]/(\varphi(x_1, \ldots, x_n))$ (в случае $n = 2$ и $\det_{\pm}(\varphi) = 1$ (иными словами, $\varphi = \mathbb{H}$), указанная формула даёт $k \times k$, и чтобы не выходить за рамки полей, мы полагаем $k(\varphi) := k$).*

Упражнение 6.4

(1) Показать, что если φ изотропна, то $k(\varphi)$ является чисто трансцендентным расширением k.

(2) Показать, что если $k(\varphi)$ - чисто трансцендентное расширение, то φ - изотропна (отдельно рассмотреть случай конечного поля (где все формы размерности > 2 изотропны), а в случае бесконечного поля доказать более сильное утверждение: если существует гомоморфизм (над k) $k(\varphi) \to k(y_1, \ldots, y_m)$ в любое чисто трансцендентное расширение, то φ - изотропна).

Таким образом, поле $k(\varphi)$ несёт информацию об изотропности формы φ.

По-видимому одними из самых важных следствий теоремы Касселса-Пфистера являются следующие два утверждения.

Теорема 6.14 *Пусть γ и φ - формы над k, и γ - анизотропна. Пусть $\gamma|_{k(\varphi)}$ - гиперболична. Тогда для любого значения $a \in D_k(\varphi)$, и общего значения $\varphi(X) \in k(V_\varphi)$ имеем: $a \cdot \varphi(X) \in G(\gamma|_{k(V_\varphi)})$.*

Доказательство: Пусть $a \in D_k(\varphi)$. Рассмотрим форму $\psi := a \cdot \varphi$. Ясно, что V_ψ естественным образом отождествляется с V_φ (а стало быть, и $k(V_\psi)$ с $k(V_\varphi)$), и при таком отождествлении, $\psi(X) = a \cdot \varphi(X)$. С другой стороны, ψ представляет единицу над k и $k(\psi)$ естественно изоморфно $k(\varphi)$.

Так как ψ представляет 1, то мы можем представить ψ в виде: $\psi = \langle 1\rangle \perp -\psi'$ для некоторой $n-1$-мерной формы ψ'.

Тогда $k(\psi) = k(V_{-\psi'})[t]/(t^2 - \psi'(X')) = k(V_{-\psi'})\sqrt{\psi'(X')}$, где $\psi'(X') \in k(V_{-\psi'})$ - общее значение формы ψ'. Так как $\gamma|_{k(\psi)}$ - гиперболична, то по Упражнению 6.2(2), $\gamma|_{k(V_{-\psi'})} = \langle 1, -\psi'(X')\rangle \cdot \rho$, где ρ - некоторая форма, определённая над $k(V_{-\psi'})$. Ограничивая на $k(V_\psi)$, мы получаем: $\gamma|_{k(V_\psi)} = \langle 1, -\psi'(X')\rangle \cdot \rho|_{k(V_\psi)}$. Но $\psi(X) = \psi(t, X') = t^2 - \psi'(X') \in k(V_\psi)$ является значением формы $\langle 1, -\psi'(X')\rangle|_{k(V_\psi)}$. А так как $D(\langle\langle b\rangle\rangle) = G(\langle\langle b\rangle\rangle)$, то $\psi(X)\cdot\langle\langle\psi'(X')\rangle\rangle|_{k(V_\psi)} = \langle\langle\psi'(X')\rangle\rangle|_{k(V_\psi)}$ и, значит, $\psi(X)\cdot(\gamma|_{k(V_\psi)}) = (\gamma|_{k(V_\psi)})$. Отсюда получаем утверждение про φ. $\square$

Комбинируя эту теорему со следствием 6.12, мы получаем:

Теорема 6.15 *Пусть γ и φ - формы над k, причём γ - анизотропна. Тогда если $\gamma|_{k(\varphi)}$ - гиперболична, то для любых значений $a \in D_k(\varphi)$, $b \in D_k(\gamma)$ форма $ab \cdot \varphi$ будет подформой в γ.*

Доказательство: Очевидно. $\square$