Лекция 7

Упражнение 7.1

1) *Пусть* $\varphi = \langle 1, -a \rangle$ *- двумерная форма, и* γ *- такая анизотропная форма, что* $\varphi(x, y) \in G(\gamma|_{k(x,y)})$*. Тогда* $\gamma = \varphi \cdot r$ *для некоторой формы* r *над* k *(использовать следствие 6.12). В частности,* $\gamma|_{k(\varphi)}$ *- гиперболична.*

2) *Используя метод теоремы 6.14 и пункт 1), показать, что для формы* φ*, представляющей 1, и анизотропной формы* γ *над* k*, следующие условия равносильны:*

   (a) $\gamma|_{k(\varphi)}$ *- гиперболична.*

   (b) $\varphi(X) \in G(\gamma|_{k(X)})$*, где* $k(X) = k(V_\varphi)$ *и* $\varphi(X)$ *- общее значение* φ*.*

Теорема 6.15 имеет много полезных следствий.

Теорема 7.1 *Пусть* $q_{\{a_1,\dots,a_n\}} := \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ *- это анизотропная форма Пфистера, и* φ *- некоторая форма (размерности* ≥ 2*). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $(q_{\{a_1,\dots,a_n\}})_{k(\varphi)}$ *- изотропна.*

(2) $(q_{\{a_1,\dots,a_n\}})_{k(\varphi)}$ *- гиперболична.*

(3) φ *с точностью до коэффициента является подформой* $q_{\{a_1,\dots,a_n\}}$*.*

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2) Следует из основного свойства пфистеровых форм.

(2) $\Rightarrow$ (3) Следует из теоремы 6.15.

(3) $\Rightarrow$ (1) Следует из того, что $\varphi|_{k(\varphi)}$ - изотропна. $\square$

Введём некоторое отношение эквивалентности на конечнопорождённых расширениях данного поля k.

Определение 7.2 *Пусть* E *и* F *- два конечнопорождённых расширения поля* k*. Мы назовём* E/k *и* F/k *стабильно эквивалентными, если для некоторых* n *и* m*, поля* $E(x_1, \dots, x_n)$ *и* $F(y_1, \dots, y_m)$ *изоморфны над* k*.*

Упражнение 7.2

1) *Пусть φ и ψ - две формы размерности ≥ 2 над k. Используя упражнение 6.4, показать, что если $\varphi|_{k(\psi)}$ - изотропна, то расширение $k(\psi)(\varphi)/k(\psi)$ - чисто трансцендентное. Вывести отсюда, что если $\varphi|_{k(\psi)}$ и $\psi|_{k(\varphi)}$ - изотропны, то расширения $k(\varphi)/k$ и $k(\psi)/k$ - стабильно эквивалентны.*

2) *Используя лемму 6.6, показать, что из стабильной эквивалентности расширений $k(\varphi)/k$ и $k(\psi)/k$ следует изотропность форм $\varphi|_{k(\psi)}$ и $\psi|_{k(\varphi)}$. Таким образом, стабильная эквивалентность полей равносильна изотропности указанных форм.*

3) *Пусть p и q - два соседа одной пфистеровой формы π. Показать что расширения $k(p)/k$ и $k(q)/k$ стабильно эквивалентны.*

4) *Показать, что если $\rho|_{k(\psi)}$ и $\psi|_{k(\varphi)}$ - изотропны, то и $\rho|_{k(\varphi)}$ - изотропна.*

5) *Аналогично, если $\rho|_{k(\psi)}$ - гиперболична и $\psi|_{k(\varphi)}$ - изотропна, то $\rho|_{k(\varphi)}$ - гиперболична.*

6) *(См. нижеследующее определение 7.3) Показать, что если E/k и F/k - стабильно эквивалентны, то $W(E/k) = W(F/k)$.*

Введём следующее обозначение.

Определение 7.3 *Пусть E/k - расширение полей. Обозначим через $W(E/k)$ ядро* $\mathrm{Ker}(W(k) \to W(E))$.

Теорема 7.1 описывает, над полями каких форм данная пфистерова форма становится гиперболичной. Оказывается, что можно решить и симметричную задачу - найти какие формы становятся гиперболичными над полем данной пфистеровой формы.

Теорема 7.4 (Витт-Пфистер) *Пусть $\pi = \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ - это пфистерова форма. Тогда $W(k(\pi)/k)$ - это циклический идеал в $W(k)$, порождённый π.*

Доказательство: Так как $\pi|_{k(\pi)}$ - гиперболична, то $\pi \cdot W(k) \subset W(k(\pi)/k)$. Пусть теперь $u \in W(k(\pi)/k)$, и q - это (единственный) анизотропный представитель класса u. Докажем по индукции по размерности q, что $q = \pi \cdot r$ для некоторой формы r над k. При $\dim(q) = 0$ - доказывать нечего. Пусть $\dim(q) > 0$. Мы знаем, что $q|_{k(\pi)}$ - гиперболична. Тогда, по теореме 6.15, существует $\lambda \in k^*$, такое, что $\lambda \cdot \pi$ изоморфна подформе q. Тогда $q = \lambda \cdot \pi \perp q'$. Но так как $q|_{k(\pi)}$ и $\pi|_{k(\pi)}$ - гиперболичны, то и $q'|_{k(\pi)}$ - гиперболична. Но $\dim(q') < \dim(q)$, т.е. $q' = \pi \cdot r'$. Значит, $q = \pi \cdot (\langle\lambda\rangle \perp r')$. $\square$

Hauptsatz

Hauptsatz (Арасон-Пфистер) *Пусть q - это анизотропная форма из $I^n(W(k))$. Тогда $\dim(q)$ либо $= 0$, либо $\geq 2^n$.*

Доказательство: Мы можем считать, что $\dim(q) > 0$. Так как $q \in I^n$, и I^n адитивно порождён n-кратными пфистеровыми формами, то $q = \pm\pi_1 \pm \ldots \pm \pi_s$ (равенство в кольце Витта). Рассмотрим цепочку полей: $k \subset k(\pi_1) \subset k(\pi_1)(\pi_2) \subset \ldots \subset k(\pi_1)\ldots(\pi_s)$. Очевидно, что $q|_{k(\pi_1)\ldots(\pi_s)}$ - гиперболическая. Пусть $0 \leq t < s$ - такое, что $q|_{k(\pi_1)\ldots(\pi_t)}$ - негиперболическая, а $q|_{k(\pi_1)\ldots(\pi_{t+1})}$ - гиперболическая. Обозначим: $E := k(\pi_1)\ldots(\pi_t)$ и $p := (q|_E)_{anis}$. Тогда $p_{E(\pi_{t+1})}$ - гиперболическая, и значит, по теореме 7.4, $p = \pi_{t+1}|_E \cdot r$, где r - некоторая форма над E размерности ≥ 1 (т.к. p - ненулевая). В частности, $\dim(p) \geq 2^n$. Ну а $\dim(q) \geq \dim(p)$. $\square$

Следствие 7.5 $\cap_{n=0}^{\infty} I^n = 0$. $\square$

Следствие 7.6 *Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in k^*$ - такие, что $\{a_1, \ldots, a_n\} = \{b_1, \ldots, b_n\} \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$. Тогда пфистеровы формы $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ и $\langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$ - изоморфны.*

Доказательство: Пусть $\varphi : \mathrm{K}_*^M(k)/2 \to \mathrm{gr}_I^*(W(k))$ - это гомоморфизм Милнора. Тогда $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle (mod\ I^{n+1}) = \varphi_n(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \varphi_n(\{b_1, \ldots, b_n\}) = \langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle (mod\ I^{n+1})$. Значит, $q := \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \perp -\langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle \in I^{n+1}$. Но обе наши пфистеровы формы представляют 1. Значит, $\dim(q_{an}) \leq 2^{n+1} - 2$. По hauptsatzy, q - гиперболична. $\square$

Таким образом, пфистерова форма $\langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$ является инвариантом чистого символа $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathrm{K}_*^M(k)/2$. В дальнейшем, мы увидим, что и символ восстанавливается по пфистеровой форме, и стало быть, они несут одну и ту же информацию.

Мультипликативные формы

Наряду с формами, обладающими билинейным законом композиции, мы можем рассмотреть формы и с более общим умножением.

Определение 7.7 *Пусть q - n-мерная форма над k. Мы назовём q мультипликативной, если существует отображение $\mu : V_q \times V_q \to V_q$, которое линейно по первой координате, рационально по второй, и $q(\mu(u \times v)) = q(u) \cdot q(v)$ (где последнее равенство понимается не поточечно, а* *формально как равенство в $k(V_q)$). Иными словами, формы $q|_{k(V_q)}$ и $q(X)\cdot q|_{k(V_q)}$ - изоморфны (здесь $q(X)$ - общее значение q).*

Оказывается, что мультипликативных форм мало, и их можно явно описать.

Теорема 7.8 *Следующие условия эквивалентны:*

(1) q - мультипликативна.

(2) q либо гиперболическая, либо пфистерова форма.

Доказательство: Ясно, что для гиперболической формы q, $G(q|_E) = E^*$, так что она мультипликативна. То же верно и для пфистеровой формы π, т.к. $G(\pi|_E) = D(\pi|_E)$ для любого расширения E/k.

Наоборот, пусть теперь q - мультипликативна. Если q - изотропна, то $q = \mathbb{H} \perp \ldots \perp \mathbb{H} \perp q_{an}$, где q_{an} - анизотропная часть q и $\dim(q_{an}) < \dim(q)$. Так как $q(X)\cdot \mathbb{H}|_{k(X)} = \mathbb{H}|_{k(X)}$, то и $q(X) \in G((q_{an})_{k(X)})$. Если $q_{an} \neq 0$, то получаем противоречие со следствием 6.12 (т.к. форма q_{an} "меньше" формы q). Значит, q - гиперболична.

Пусть q - анизотропна. По следствию 6.12, форма q представляет 1. Из упражнения 7.1(2) следует, что $q|_{k(q)}$ - гиперболическая. Теперь наше утверждение следует из следующей теоремы. □

Теорема 7.9 *Пусть q - это анизотропная форма, представляющая 1. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $q|_{k(q)}$ - гиперболична.

(2) q - пфистерова форма.

Доказательство: То что (2) $\Rightarrow$ (1) следует из основного свойства пфистеровых форм. Так как q представляет 1, то $q = \langle 1\rangle \perp q'$. Если q - двумерная, то она пфистерова. Пусть $\dim(q) \geq 3$ и $\langle a_1, a_2\rangle$ - любая двумерная подформа формы $-q'$, т.е., $\langle\langle a_1\rangle\rangle \perp \langle -a_2\rangle$ - подформа q. Тогда, по упражнению 7.2(4), $q|_{k(\langle\langle a_1\rangle\rangle\perp\langle -a_2\rangle)}$ - также гиперболична. Так как $\langle\langle a_1\rangle\rangle \perp \langle -a_2\rangle$ - сосед пфистеровой формы $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$, то по упражнению 7.2(3)(6), $q|_{k(\langle\langle a_1,a_2\rangle\rangle)}$ - гиперболична. По теореме 6.15, $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ - подформа в q. В частности, $\dim(q) \geq 4$, и если $\dim(q) = 4$, то q - пфистерова. Опять, представляя q в виде $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle \perp q"$, и взяв в качестве a_3 любое значение $-q"$, мы получаем, что $q|_{k(\langle\langle a_1,a_2\rangle\rangle\perp\langle -a_3\rangle)}$ - гиперболична. Значит, и $q|_{k(\langle\langle a_1,a_2,a_3\rangle\rangle)}$ - гиперболична. Отсюда, $\langle\langle a_1, a_2, a_3\rangle\rangle \subset q$. Опять, $\dim(q) \geq 8$ и если $\dim(q) > 8$, то мы продолжаем в том же ключе. □