Лекция 8

Цепочная эквивалентность пфистеровых форм

Определение 8.1 *Пусть $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ и $\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ - это два представления некоторой пфистеровой формы. Мы назовём их элементарно эквивалентными, если существуют $1 \le i, j \le n$, такие, что $a_l = b_l$ при $l \ne i, j$, и $\langle\langle a_i, a_j\rangle\rangle = \langle\langle b_i, b_j\rangle\rangle$.*

Мы назовём две записи пфистеровой формы n-цепочно эквивалентными (обозначение $\overset{\text{п-цеп}}{\backsim}$), если они могут быть связаны цепочкой элементарных эквивалентностей.

Теорема 8.2 *Любые две записи данной пфистеровой формы являются n-цепочно эквивалентными.*

Доказательство: Для доказательства нам понадобятся пара лемм.

Лемма 8.3

(1) Пусть $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle =: \varphi = \langle 1\rangle \perp -\varphi'$ - это некоторая пфистерова форма, и b - ненулевое значение φ'. Тогда $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b, b_2, \dots, b_n\rangle\rangle$ для некоторых $b_2, \dots, b_n \in k^*$.

(2) Пусть $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle =: \varphi$ - это пфистерова форма, и λ - ненулевое значение φ. Тогда для любого $c \in k^*$, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, c\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, \lambda\cdot c\rangle\rangle$.

Доказательство: Будем доказывать сразу оба утверждения индукцией по n. При $n = 1$ утверждение очевидно.

$(n-1) \to (n)$: (1) Пусть $\psi := \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle$, тогда $\varphi = \psi \cdot \langle\langle a_n\rangle\rangle$ и $\varphi' = \psi' \perp a_n\cdot\psi$. Таким образом, $b = \psi'(x) + a_n\psi(y)$. Обозначим: $\mu' := \psi'(x)$ и $\lambda := \psi(y)$. Ясно, что $\mu' \in D_k(\psi')$, $\lambda \in D_k(\psi)$ и $b = \mu' + a_n\lambda$. Имеем два случая: а) $\lambda = 0$; б) $\lambda \ne 0$.

а) В этом случае, $b \in D_k(\psi')$ и, стало быть,
$\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b, b_2, \dots, b_{n-1}\rangle\rangle$ по предположению индукции. А это влечёт: $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b, b_2, \dots, b_{n-1}, a_n\rangle\rangle$.

б) В этом случае, применяя предположение индукции к (2), мы получаем, что $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda\cdot a_n\rangle\rangle$. Если $\mu' = 0$, то всё доказано. Предположим, что $\mu' \ne 0$. Тогда, по предположению индукции, $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle \mu', c_2, \dots, c_{n-1}\rangle\rangle$. Значит, $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim}$

$\langle\langle \mu', c_2, \dots, c_{n-1}, \lambda\cdot a_n\rangle\rangle$. Замечая, что 2-кратная пфистерова форма $\langle\langle u, v\rangle\rangle$ изоморфна форме $\langle\langle u+v, -uv\rangle\rangle$ (проверьте это!), мы получаем: $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b, b_2, \dots, b_n\rangle\rangle$. Утверждение (1) доказано.

Для доказательства (2) заметим, что $\lambda = x^2 - b$, для некоторого $x \in k^*$ и $b \in D_k(\varphi')$. Если $b = 0$, то доказывать нечего. Если $b \neq 0$, то, по пункту (1), $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b, b_2, \dots, b_n\rangle\rangle$. Учитывая, что $\langle\langle b, c\rangle\rangle = \langle\langle b, (x^2-b)\cdot c\rangle\rangle$, мы получаем: $\langle\langle a_1, \dots, a_n, c\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_2, \dots, b_n, b, c\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_2, \dots, b_n, b, \lambda\cdot c\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, \lambda\cdot c\rangle\rangle$. Таким образом, индуктивный переход для (1) и (2) доказан. □

Лемма 8.4 *Пусть $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ и $\tau = \langle\langle b_1, \dots, b_m$ - это записи, соответственно, n и m - кратной пфистеровой формы. Как обычно, мы обозначаем $\tau = \langle 1\rangle \perp -\tau'$. Пусть c - это любое ненулевое значение формы $\varphi\cdot(\tau')$. Тогда $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, c, c_2, \dots, c_m\rangle\rangle$ для некоторых $c_2, \dots, c_m \in k^*$.*

Доказательство: Индукция по m. При $m = 0$ доказывать нечего. $(m-1) \to (m)$: Пусть $\rho := \langle\langle b_1, \dots, b_{m-1}\rangle\rangle$, тогда $\varphi\cdot(\tau') = \varphi\cdot(\rho') \perp b_m\cdot\varphi\cdot\rho$. Пусть $c = \mu' + b_m\cdot\lambda$, где $\mu' \in D_k(\varphi\cdot(\rho')) \cup 0$ и $\lambda \in D_k(\varphi\cdot\rho) \cup 0$. Если $\lambda = 0$, то по предположению индукции, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{m-1}\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, c, c_2, \dots, c_{m-1}\rangle\rangle$ и, значит,
$\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, c, c_2, \dots, c_{m-1}, b_m\rangle\rangle$. Если $\lambda \neq 0$, то $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{m-1}, \lambda\cdot b_m\rangle\rangle$, по лемме 8.3(2). Если $\mu' = 0$, то всё доказано. Если $\mu' \neq 0$, то по предположению индукции, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{m-1}\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, \mu', d_2, \dots, d_{m-1}\rangle\rangle$. Стало быть, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, \mu', d_2, \dots, d_{m-1}, \lambda\cdot b_m\rangle\rangle$. Опять используя, что для ненулевых $u, v, u+v$ имеется изоморфизм $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle\langle u+v, -uv\rangle\rangle$, мы получаем: $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_n, c, d_2, \dots, d_m\rangle\rangle$. □

Теперь нетрудно доказать теорему. Пусть $0 \leq m \leq n$ - такое, что $a_1 = b_1; \dots; a_m = b_m$. Используем убывающую индукцию по m. При $m = n$ доказывать нечего.

$(m+1) \to (m)$: Положим $\varphi := \langle\langle a_1, \dots, a_m\rangle\rangle$ и $\tau := \langle\langle a_{m+1}, \dots, a_n\rangle\rangle$. Так как $\varphi\cdot(\tau') = \langle\langle b_1, \dots, b_m\rangle\rangle \cdot ((\langle\langle b_{m+1}, \dots, b_n\rangle\rangle)')$ (по теореме Витта о сокращении, так как обе формы являются ортогональным дополнением к $\langle\langle a_1, \dots, a_m\rangle\rangle = \langle\langle b_1, \dots, b_m\rangle\rangle$ в $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle = \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$), то $b_{m+1} \in D_k(\varphi\cdot(\tau'))$. По лемме 8.4, $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_1, \dots, a_m, b_{m+1}, c_{m+2}, \dots, c_n\rangle\rangle$, и по предположению индукции, $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{п-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$. Теорема

8.2 доказана. $\square$

Таким образом соотношения между 2-кратными пфистеровыми формами порождают соотношения между n-кратными.

Определение 8.5 *Пусть $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ - это запись 2-кратной пфистеровой формы. Тривиально эквивалентной ей мы назовём запись вида $\langle\langle a_2, a_1(x^2 - a_2y^2)\rangle\rangle$, где $x, y \in k^*$ и $x^2 - a_2y^2 \neq 0$. Мы назовём две записи $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ и $\langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$ цепочно т-эквивалентными (обозначение $\overset{\text{т-цеп}}{\backsim}$), если между ними есть цепочка элементарных преобразований, которые "тривиальны" на соотв. 2-кратных записях.*

Лемма 8.6 *Две записи одной 2-кратной пфистеровой формы являются т-эквивалентными.*

Доказательство: Пусть $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle = \langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle$. Тогда $\langle a_1, a_2, -a_1a_2\rangle = \langle b_1, b_2, -b_1b_2\rangle$. Оставим случай гиперболической формы читателю. Мы имеем подформы $\langle a_1, -a_1a_2\rangle$ и $\langle b_1, -b_1b_2\rangle$ в форме $\langle a_1, a_2, -a_1a_2\rangle$. Они обязаны нетривиально пересекаться. Пусть $\langle c\rangle$ - это их общая подформа. Так как мы предположили $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle$ анизотропной, то $c \neq 0$ и $b_1(z^2 - b_2t^2) = c = a_1(x^2 - a_2y^2)$. Отсюда видно, что: $\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle \overset{\text{т-цеп}}{\backsim} \langle\langle a_2, c\rangle\rangle \overset{\text{т-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_2, c\rangle\rangle \overset{\text{т-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle$. $\square$