Лекция 9

Теперь мы можем показать, что пфистерова форма несёт ту же информацию, что и соответствующий чистый символ.

Теорема 9.1 (Р.Элман-Т.Лэм) *Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in k^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *Чистые символы $\{a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_1, \dots, b_n\}$ равны в $\mathrm{K}_n^M(k)/2$.*

(2) $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \equiv \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle \ (\mathit{mod}\ I^{n+1})$.

(3) $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle = \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$.

(4) $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle \overset{\text{т-цеп}}{\backsim} \langle\langle b_1, \dots, b_n\rangle\rangle$.

Доказательство: (1) $\Rightarrow$ (2) Следует из того, что гомоморфизм Милнора корректно определён.

(2) $\Rightarrow$ (3) Следует из Hauptsatza (см. Следствие 7.6).

(3) $\Rightarrow$ (4) Следует из теоремы 8.2 и леммы 8.6.

(4) $\Rightarrow$ (1) Следует из того, что $\{a_1, a_2\} = \{a_1(x^2 - a_2y^2), a_2\} \in \mathrm{K}_2^M(k)/2$ для любых $x, y \in k$, таких, что $x^2 - a_2y^2 \neq 0$. $\square$

В частности, мы получаем критерий тривиальности чистого символа в $\mathrm{K}_n^M/2$.

Теорема 9.2 *Пусть $a_1, \dots, a_n \in k^*$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\{a_1, \dots, a_n\} = 0 \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$.

(2) *Форма $\langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$ изотропна.*

Это означает, что проективная квадрика $Q_{\{a_1,\dots,a_n\}}$, отвечающая форме $q_{\{a_1,\dots,a_n\}} := \langle\langle a_1, \dots, a_n\rangle\rangle$, является *норменным многообразием* для символа $\{a_1, \dots, a_n\}$. Пусть h - это элемент $\mathrm{K}_n^M(k)/l$. Тогда гладкое проективное многообразие R_h называется *норменным многообразием* для h, если для любого расширения полей E/k, многообразие $R_h|_E$ имеет E-рациональную точку тогда и только тогда, когда $h|_E = 0$. Так как пфистерова форма обладает E-рациональной точкой одновременно со своим соседом, то и проективная квадрика, отвечающая любому соседу будет норменным многообразием. Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда

$\langle 1, -a, -b\rangle$ - это сосед формы $\langle\langle a, b\rangle\rangle$, и стало быть, символ $\{a, b\} \in \mathrm{K}_2^M(k)$ является 2-делимым тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in k$, такие, что $ax^2 + by^2 = 1$ (легко видеть, что последнее условие равносильно изотропности формы $\langle 1, -a, -b\rangle$).

Упражнение 9.1 *Пусть $a, b, c, d \in k^*$. Показать, что следующие условия эквивалентны:*

(1) $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle\langle c, d\rangle\rangle$.

(2) $\{a, b\} = \{c, d\} \in \mathrm{K}_2^M(k)/2$.

(3) *Алгебры $Quat(a, b)$ и $Quat(c, d)$ изоморфны над k.*

(Показать, что редуцированная норма $q = \langle\langle a, b\rangle\rangle$ может быть инвариантно задана следующим образом: $q(u) = det(u|_{\overline{k}})$, где $u|_{\overline{k}} \in Quat(a, b)|_{\overline{k}} \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\overline{k})$ (в частности, это число лежит в k). Подобным образом может быть определена редуцированная норма любой центральной простой алгебры.)

Другим важным следствием теоремы 9.1 является:

Следствие 9.3 *Гомоморфизм Милнора инъективен на чистых символах*

Таким образом, для доказательства "гипотезы Милнора о квадратичных формах" достаточно доказать следующее:

"Пусть $h \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$ - это некоторый ненулевой элемент. Тогда существует расширение полей E/k, такое, что $h|_E$ - это **ненулевой** чистый символ в $\mathrm{K}_n^M(E)/2$."

Действительно, это следует из коммутативности диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_n^M(k)/2 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^n_{I^\cdot}(W(k)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{K}_n^M(E)/2 & \longrightarrow & \mathrm{gr}^n_{I^\cdot}(W(E)) \end{array}.$$

Доказывается это утверждение с помощью следующей (очень сложной) теоремы (которая является аналогом теоремы 7.4):

Теорема (В.Воеводский) *Пусть $\alpha = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$ - это чистый символ, и q_α - это соответствующая пфистерова форма. Тогда $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}_*^M(k)/2 \to \mathrm{K}_*^M(k(q_\alpha))/2)$ является циклическим идеалом, порождённым α. В частности, $\mathrm{Ker}(\mathrm{K}_n^M(k)/2 \to \mathrm{K}_n^M(k(q_\alpha))/2)$ состоит из двух элементов: 0 и α (равных, если $\alpha = 0$).*

Доказательство этого результата выходит за рамки данного курса.

Нужное нам утверждение выводится теперь так: Пусть $h \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$ - ненулевой. Тогда $h = \alpha_1 + \ldots + \alpha_s$, где α_i - это чистый символ. Пусть $q_{\alpha_1}, \ldots, q_{\alpha_n}$ - это соответствующие пфистеровы формы. Рассмотрим цепочку полей: $k = k_0 \subset k_1 \subset \ldots \subset k_s$, где $k_i := k(q_{\alpha_1})...(q_{\alpha_i})$. Ясно, что $h|_{k_s} = 0$, с другой стороны, $h|_{k_0} \neq 0$. Пусть t - это такое максимальное число, что $h|_{k_t} \neq 0$, а $h|_{k_{t+1}} = 0$. Тогда, по теореме, $h|_{k_t}$ равен **ненулевому** чистому символу $\alpha_{t+1}|_{k_t}$.

Формы Альберта

Введём ещё некоторые примеры квадратичных форм. Точно также, как пфистеровы формы несут информацию про один чистый символ, имеются формы, в которых закодирована информация про два чистых символа.

Определение 9.4 *Пусть $\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$ - это чистые символы в $\mathrm{K}_n^M(k)/2$. (Обобщённой) формой Альберта называется форма: $A_{\alpha,\beta} := \langle\langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle \perp -\langle\langle b_1, \ldots, b_n\rangle\rangle$.*

Основным свойством $A_{\alpha,\beta}$ является следуещее:

Теорема 9.5 (Р.Элман-Т.Лэм) *Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{K}_n^M(k)/2$ - чистые символы. Индекс Витта $i_W(A_{\alpha,\beta})$ принимает только значения вида 2^i, где $0 \leq i \leq n$. Более того, следующие условия эквивалентны.*

(1) $i_W(A_{\alpha,\beta}) = 2^i$.

(2) *Степень наибольшего общего чистого делителя символов α и β равна i.*

Доказательство: Пусть степень наибольшего общего чистого делителя α и β равна i, и $\gamma \in \mathrm{K}_i^M(k)/2$ -это соответствующий делитель. Тогда $q_\gamma \subset q_\alpha$ и $q_\gamma \subset q_\beta$. Стало быть, $i_W(A_{\alpha,\beta}) \geq \dim(q_\gamma) = 2^i$.

Наоборот, докажем индукцией по i, что если $i_W(A_{\alpha,\beta}) \geq 2^i$, то α и β делятся на общий чистый делитель степени i. При $i = 0$ доказывать нечего. $(i-1) \to (i)$: $\alpha = \{c_1, \ldots, c_{i-1}\} \cdot \{a_i, \ldots, a_n\}$ и $\beta = \{c_1, \ldots, c_{i-1}\} \cdot \{b_i, \ldots, b_n\}$, по предположению индукции. Так как $i_W(A_{\alpha,\beta}) > 2^{i-1}$), то формы $\langle\langle c_1, \ldots, c_{i-1}\rangle\rangle \cdot (\langle\langle a_i, \ldots, a_n\rangle\rangle')$ и $\langle\langle c_1, \ldots, c_{i-1}\rangle\rangle \cdot (\langle\langle b_i, \ldots, b_n\rangle\rangle')$ (как ортогональные доролнения к $\langle\langle c_1, \ldots, c_{i-1}\rangle\rangle$ в $\langle\langle \alpha\rangle\rangle$ и $\langle\langle \beta\rangle\rangle$, соответственно) принимают общее ненулевое значение - назовём его c_i. Тогда по лемме 8.4 и теореме 9.1, α и β делятся на $\{c_1, \ldots, c_n\}$. $\square$

В частности, мы получаем, что $\mathrm{K}_n^M(k)/2$ состоит из чистых символов тогда и только тогда, когда $i_W(A_{\alpha,\beta}) \geq 2^{n-1}$ для любой альбертовой формы. Например, $\mathrm{K}_2^M(k)/2$ состоит из чистых символов тогда и только тогда, когда все формы вида $\langle a, b, -ab, -c, -d, cd\rangle$ изотропны. Это происходит, например, для полей алгебраических чисел.