ЛЕКЦИЯ 1

Определение 1. *Представление* ϱ группы G в линейном пространстве V — гомоморфизм групп $G \to GL(V)$, где $GL(V)$ — группа обратимых линейных преобразований пространства V.

Другими словами, это — действие группы G на пространстве V линейными преобразованиями. Часто представлением называют и само пространство V, подразумевая действие группы на нем.

Определение 2. Представление ϱ называется *точным*, если этот гомоморфизм — вложение.

Другими словами, представление точное, если элементы G, отличные от единицы, действуют нетождественными преобразованиями.

Пример 1. Тривиальное представление произвольной группы в произвольном пространстве V : все элементы G действуют тождественными преобразованиями.

Пример 2. Трехмерное вещественное представление групп самосовмещений правильных многогранников и их подгрупп, в частности A_4, S_4, A_5.

Пример 3. Лево–регулярное представление конечной группы. Пусть $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. Рассмотрим пространство R с базисом $\{e_{g_i}\}$ и действием $\varrho(g)e_h = e_{gh}$, $g, h \in G$. Получим точное $|G|$–мерное представление.

Пример 4. Право–регулярное представление конечной группы. Аналогично рассмотрим пространство R' с базисом $\{e'_{g_i}\}$ и действием $\varrho(g)e'_h = e'_{h(g^{-1})}$, $g, h \in G$.

Пример 5. Прямая сумма и тензорное произведение представлений. Группа действует одновременно на каждую компоненту.

Определение 3. *Отображение* представлений группы G (*сплетающий оператор*) ϱ_1 и ϱ_2 в пространствах V_1 и V_2 — линейное отображение $f : V_1 \to V_2$, такое что

$$f(\varrho_1(g)v) = \varrho_2(g)f(v) \qquad \text{для всех } g \in G,\ v \in V_1.$$

Другими словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varrho_1(g)} & V_1 \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ V_2 & \xrightarrow{\varrho_2(g)} & V_2 \end{array}$$

коммутативна для всех $g \in G$

Докажите, что сплетающие операторы образуют подпространство в пространстве всех отображений $V_1 \to V_2$.

Докажите, что композиция сплетающих операторов и обратный к сплетающему оператору — сплетающий оператор.

Определение 4. *Изоморфизмом* представлений называется обратимый сплетающий оператор.

Пример 6. Скалярный оператор $V \to V$ коммутирует с любым оператором, а значит является сплетающим оператором для любого представления любой группы.

Пример 7. Отображение регулярных представлений $R \to R'$, переводящее вектор e_g в $e'_{g^{-1}}$ является изоморфизмом представлений.

Пример 8. Пусть ϱ — представление группы G в пространстве V, $v \in V$ — произвольный вектор, R — регулярное представление G. Тогда определен сплетающий оператор $R \to V$, такой что

$$e_g \to \varrho(g)v \quad \text{для } g \in G.$$

Определение 5. *Подпредставлением* называется подпространство, инвариантное относительно действия группы.

Другими словами, подпредставление — подпространство, само являющееся представлением.

Докажите, что ядро и образ сплетающих операторов — подпредставления.

Определите факторпредставление, то есть действие группы на факторпространстве по подпредставлению.

Определение 6. Представление называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных подпредставлений.

Задача 1. У всякой ли группы есть точное неприводимое представление?

Предложение 1. *Всякое неприводимое представление конечной группы — конечномерно.*

Действительно, образ отображения из примера 8 является конечномерным подпредставлением.

Теорема 1. *(Машке) Пусть основное поле — $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда всякое представление конечной группы изоморфно прямой сумме неприводимых.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Определение 7. Скалярное произведение на пространстве V представления ϱ группы G называется *инвариантным*, если

$$(\varrho(g)v_1, \varrho(g)v_2) = (v_1, v_2) \qquad \text{для всех } v_1, v_2 \in V,\ g \in G.$$

Другими словами, элементы G действуют ортогональными/унитарными операторами относительно данного скалярного произведения.

Лемма 1. *На всяком вещественном/комплексном представлении конечной группы существует инвариантное скалярное произведение.*

Инвариантное скалярное произведение строится так. Пусть $(,)$ — некоторое скалярное произведение. Тогда положим

$$(v_1, v_2)_{inv} = \sum_{g \in G} (\varrho(g)v_1, \varrho(g)v_2).$$

Легко проверить, что $(,)_{inv}$ инвариантно и положительно определено.

Теорема следует из леммы поскольку для всякого подпредставления $V_1 \subset V$ выполняется $V \cong V_1 \oplus V_1^{\perp}$, где $V_1^{\perp}$ — ортогональное дополнение к V_1 относительно инвариантного скалярного произведения.

Замечание 1. Условие конечности группы существенно. Рассмотрим представление группы $\mathbb{Z}$, при котором число n действует матрицей

$$\varrho(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это представление имеет ровно одно нетривиальное подпредставление (общий собственный вектор) и, тем самым, не может быть разложено в прямую сумму неприводимых. Утверждение леммы 1 также при этом нарушается.

Таким образом, основная задача — классификация неприводимых представлений. Но можно рассмотреть и "обратную" задачу — у каких конечных групп бывает точное представление данной размерности. Другими словами, спрашивается, какие бывают конечные подгруппы у группы GL_n.

Докажите, что всякая конечная подгруппа $GL_1(\mathbb{C})$ — циклическая.

Известен и ответ для размерности 2. Для простоты избавимся от скаляров.

Теорема 2. *(Макки) Всякая конечная подгруппа $PGL_2(\mathbb{C})$ — одна из следующего списка:*
"Серия A_n" — циклические группы
"Серия D_n" — группы диэдра (самосовмещений многоугольника)
"E_6" — группа вращений тетраэдра (A_4)
"E_7" — группа вращений куба (S_4)
"E_8" — группа вращений икосаэдра (A_5)

Доказательство этой теоремы сложно, но можно указать, что это за подгруппы. Согласно лемме 1 подгруппы имеет смысл искать внутри $PSU_2 \subset PSL_2$.

Задача 2. $PSU_2 = SU_2/\{\pm Id\} \cong SO_3$.

Указанные в теореме подгруппы легко найти внутри SO_3.