ЛЕКЦИЯ 10

Пусть F — произвольное поле.

Определение 1. *Ассоциативной алгеброй* над полем F называется линейное пространство над F с линейным по каждому из аргументов ассоциативным умножением. Будем также предполагать, что в алгебре имеется единица по умножению.

Определение 2. *Левым модулем* над ассоциативной алгеброй A называется линейное пространство M, на котором элементы A действуют линейными операторами так, что

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)m = \lambda_1(a_1 m) + \lambda_2(a_2 m), \qquad a_1(a_2 m) = (a_1 a_2)m, \qquad m \in M,\ a_1, a_2 \in A,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F.$$

Пример 1. Групповая алгебра $F[G]$ является ассоциативной алгеброй, а представления G являются левыми $F[G]$–модулями.

Определение 3. *Правым модулем* над ассоциативной алгеброй A называется линейное пространство M, на котором элементы A действуют линейными операторами так, что

$$m(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = \lambda_1(m a_1) + \lambda_2(m a_2), \qquad (m a_2)a_1 = m(a_2 a_1), \qquad m \in M,\ a_1, a_2 \in A,\ \lambda_1, \lambda_2 \in F.$$

Элементы A пишутся при этом с разной стороны элементов M чтобы проще было различать левые и правые модули.

Определение 4. Ассоциативная алгебра A^{opp}, умножение в которой отличается от умножения в A порядком сомножителей, называется *транспонированной* по отношению к A.

Упражнение 1. Докажите, что левые A–модули являются правыми A^{opp}–модулями и наоборот.

Упражнение 2. Определите по аналогии с представлениями групп подмодуль, фактормодуль, прямую сумму модулей и отображение модулей. Имеют ли смысл отображения из левого в правый модуль? Докажите, что ядро и образ отображения модулей являются подмодулями. Докажите, что отображения между двумя модулями образуют линейное пространство, а эндоморфизмы модуля — ассоциативную алгебру (умножение в которой определяется как композиция отображений).

Пространство отображений из модуля M_1 в модуль M_2 обозначается $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$.

Определение 5. Модуль называется *простым*, если он не содержит нетривиальных подмодулей.

Определение 6. Ассоциативная алгебра называется *алгеброй с делением*, если всякий ненулевой ее элемент — обратим по умножению.

Предложение 1. *(Лемма Шура)*
(i) Если M_1, M_2 — простые неизоморфные A–модули, то $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) = 0$.
(ii) Если A–модуль M — прост, то $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ — алгебра с делением.

Доказательство. Так как ядро и образ отображения модулей — подмодули, всякое нетривиальное отображение простых модулей — изоморфизм. Отсюда следует (i) и, так как обратное линейное отображение к отображению модулей — отображение модулей, (ii). ■

Определение 7. Модуль называется *полупростым*, если всякий подмодуль в нем выделяется прямым слагаемым (для всякого подмодуля $M' \subset M$ найдется дополнительный подмодуль $M'' \subset M$, такой что $M \cong M' \oplus M''$).

Предложение 2. *Подмодуль и фактормодуль полупростого модуля — полупросты.*

Доказательство. Докажем полупростоту фактормодуля. Пусть M — полупростой модуль, N — его подмодуль, V — подмодуль M/N. Обозначим $\mathrm{pr} : M \to M/N$ естественное отображение. Рассмотрим подмодуль $\mathrm{pr}^{-1}(V) \subset M$. По предположению найдется дополнительный к нему подмодуль $V' \subset M$. Тогда подмодуль $\mathrm{pr}(V') \subset M/N$ будет дополнительным к V.

Так как подмодуль полупростого модуля изоморфен фактормодулю по дополнительному подмодулю, утверждение верно и для него. ■

Предложение 3. *Конечномерный модуль полупрост тогда и только тогда, когда он изоморфен прямой сумме простых модулей.*

Доказательство.

Индукцией по размерности легко доказать, что всякий полупростой модуль изоморфен прямой сумме простых. Сложнее доказать полупростоту прямой суммы.

Упражнение 3. Пусть модуль E — прост. Докажите полупростоту модуля $nE = E \oplus \dots \oplus E$.

Пусть теперь $M = n_1E_1 \oplus \dots \oplus n_rE_r$, M' — подмодуль M. Тогда так как M' — полупрост, он изоморфен прямой сумме простых модулей. И по лемме Шура $M' = m_1E_1 \oplus \dots \oplus m_rE_r$, $m_i \leq n_i$. Записывая вложение M' в M покомпонентно, сведем общий случай к упражнению 3. ■

Предложение 4. *Разложение полупростого модуля в прямую сумму простых — единственно.*

Доказательство. Это утверждение следует из леммы Шура. Разложение определяется размерностями пространств отображений из простых модулей в данный. ■

Алгебру A можно рассматривать как левый A–модуль ${}_AA$, на котором элементы A действуют умножением слева и как правый A–модуль A_A, на котором элементы A действуют умножением справа. При этом действия слева и справа коммутируют между собой. Подобные представления часто называют *бимодулями*.

Упражнение 4. Докажите, что подмодули ${}_AA$ — левые идеалы A, а подмодули A_A — правые идеалы A.

Алгебра A восстанавливается по структуре модуля над собой. А именно

Предложение 5. $A \cong \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$, $A^{opp} \cong \mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_AA)$.

Доказательство. Определим отображение из $\mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$ в A, рассматривая для каждого элемента $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$ его значение на единице $\varphi(1)$. Так как для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$ выполнено $\varphi(a) = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1)a$, всякое φ определяется значением на единице, и построенное отображение — вложение. Кроме того, для всякого $x \in A$ определен элемент $\varphi_x \in \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A)$, такой что $\varphi_x(a) = xa$, значит, построенное отображение — изоморфизм векторных пространств. Сравним умножение:

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(1) = \varphi_1(\varphi_2(1)) = \varphi_1(1 \cdot \varphi_2(1)) = \varphi_1(1) \cdot \varphi_2(1).$$

Второе равенство выводится из первого транспонированием. ■

Определение 8. Ассоциативная алгебра называется *полупростой* если правый A–модуль A_A — полупрост.

Как мы увидим, это равносильно условию, что левый A–модуль ${}_AA$ — полупрост.

Пример 2. Пусть $A = \mathrm{Mat}_n(F)$ — алгебра матриц $n \times n$ над полем F. Левый A–модуль ${}_AA$ распадается в прямую сумму n простых (докажите это!) модулей V_i, состоящих из матриц, у которых все столбцы — нулевые, кроме i–того. Аналогично, и правый A–модуль A_A распадается в прямую сумму n простых модулей V_i^T, состоящих из матриц, у которых все строки — нулевые, кроме i–той. А значит, алгебра $\mathrm{Mat}_n(F)$ — полупроста.

Пример 3. Пусть A — алгебра с делением. Тогда модули ${}_AA$ и A_A — просты, а значит, алгебра A — полупроста.

Пример 4. Пусть D — алгебра с делением, $A = \mathrm{Mat}_n(D)$. Тогда, аналогично примеру 2, левый модуль ${}_AA$ распадается в прямую сумму n простых модулей–столбцов $V_i(D)$, а правый модуль A_A распадается в прямую сумму n простых модулей–строк $V_i(D)^T$. А значит, алгебра $\mathrm{Mat}_n(D)$ — полупроста.

Оказывается, это — все содержательные примеры.

Теорема 1. *(Веддерберн) Всякая полупростая ассоциативная алгебра A разлагается в прямую сумму*

$$A \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r),$$

где D_i — алгебры с делением. При этом, такое разложение — единственно.

Доказательство. Пусть $A_A = n_1E_1 \oplus \dots \oplus n_rE_r$ — разложение на простые модули. Тогда

$$A \cong \mathrm{Hom}_A(A_A, A_A) \cong \bigoplus_{i=1\dots r} \mathrm{Hom}_A(n_iE_i, n_iE_i) \cong \bigoplus_{i=1\dots r} \mathrm{Mat}_N(\mathrm{Hom}_A(E_i, E_i)).$$

Полагая $D_i = \mathrm{Hom}_A(E_i, E_i)$, получим требуемое разложение. Единственность такого разложения следует из единственности разложения полупростого модуля в прямую сумму простых. ■

Следствие 1. *Пусть A — ассоциативная алгебра. Тогда модуль A_A полупрост тогда и только тогда, когда модуль ${}_AA$ — полупрост.*

Действительно, утверждение "только тогда" следует из теоремы Веддерберна и примеров 2–4. Утверждение "тогда" доказывается переходом к транспонированной алгебре.

Пример 5. Пусть G — конечная группа, а характеристика поля F не делит порядок G. Тогда групповая алгебра $F[G]$ — полупроста, так как всякий конечномерный левый $F[G]$–модуль (представление G) полупрост.

Особенно проста классификация в случае алгебраически замкнутого поля.

Предложение 6. *Всякая конечномерная алгебра с делением над алгебраически замкнутым полем F изоморфна F.*

Доказательство. Заметим, что всякая алгебра с единицей над полем F содержит подалгебру констант, изоморфную F. Пусть в нашем случае $x \in A$ — не константа. Рассмотрим действие элемента x умножением слева на A. В силу алгебраической замкнутости F найдется собственное значение $\lambda \in F$ этого оператора. То есть, действие элемента $x - \lambda \cdot 1$ не обратимо, а значит не обратим и сам элемент $x - \lambda \cdot 1$. Противоречие. ■

Перейдем к представлениям полупростых ассоциативных алгебр.

Предложение 7. *Всякий конечнопорожденный модуль над полупростой алгеброй — полупрост.*

Доказательство. Пусть A — полупростая ассоциативная алгебра, M — модуль над ней (для определенности — левый), $m_1, \dots, m_s$ — образующие M. Тогда определено сюръективное отображение ${}_AA \oplus \dots \oplus {}_AA \to M$, переводящее элемент $(a_1, \dots, a_s)$ в элемент $\sum a_i m_i$. То есть, M — фактормодуль полупростого модуля, а значит, M — полупрост. ■

Предложение 8. *Пусть $A = \mathrm{Mat}_n(D)$, где D — алгебра с делением. Тогда*

(i) Всякий простой левый A–модуль либо одномерный тривиальный (все элементы включая единицу действуют нулем), либо изоморфен вектору–столбцу D^n.

(ii) Всякий простой правый A–модуль либо одномерный тривиальный (все элементы включая единицу действуют нулем), либо изоморфен вектору–строке $(D^n)^T$.

Доказательство. Докажем пункт (i), пункт (ii) доказывается аналогично. Обозначим $A = \mathrm{Mat}_n(D)$. Всякий нетривиальный неприводимый левый A — модуль порожден одной образующей, поэтому он является фактором модуля ${}_AA$. В силу полупростоты это означает, что он вкладывается в ${}_AA$. Но ${}_AA$ — прямая сумма n экземпляров модуля D^n. Значит, в силу единственности разложения на простые модули, M изоморфен D^n. ■

Теорема 2. *Пусть $A = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r)$ — полупростая ассоциативная алгебра. Тогда у нее имеется r неизоморфных нетривиальных простых модулей (как левых, так и правых), размерность которых равна $n_i \dim D_i$.*

Доказательство. Пусть p_i — единицы подалгебр $\mathrm{Mat}_{n_i}(D_i)$, рассматриваемые как элементы алгебры A вида $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда $p_i^2 = 1$, $p_i p_j = 0$ при $i \neq j$, а сумма всех p_i равна единице алгебры A. Из этого следует, что всякий A–модуль M распадается в прямую сумму подмодулей $p_i M$ (или $M p_i$ для правого модуля). Если M — нетривиальный неприводимый модуль, то ровно один из этих подмодулей будет нетривиален. По предложению 8 он будет изоморфен модулю–столбцу $(D_i)^{n_i}$ (или аналогичному модулю–строке для правого модуля). ■

Эта теорема обобщает теорему о том, что групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ изоморфна прямой сумме алгебр эндоморфизмов пространств неприводимых представлений.

Упражнение 5. Чему изоморфна групповая алгебра $\mathbb{R}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$?