ЛЕКЦИЯ 2

Категория представлений группы

На прошлой лекции были определены объекты этой категории (представления) и морфизмы (отображения) между ними (сплетающие операторы). Начнем с описания объектов.

Теорема 1. *(Машке) Пусть группа G — конечна и количество элементов в ней $|G|$ не делится на характеристику поля. Тогда всякое представление G изоморфно прямой сумме неприводимых.*

Доказательство. Если поле — $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то, как обсуждалось на предыдущей лекции, можно построить инвариантное скалярное произведение. Вместо этого построим инвариантный проектор на подпредставление.

Определение 1. Пусть V_1 — подпространство линейного пространства V. Тогда линейное отображение $P : V \to V$ называется *проектором* на V_1 если $P|_{V_1} = Id$ и образ P совпадает с V_1.

Упражнение 1. Докажите, что в этом случае $V = V_1 \oplus \mathrm{Ker} P$.

Пусть теперь V_1 — подпредставление V, P—некоторый проектор на V_1. Положим

$$P_{inv} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho(g)^{-1} \circ P \circ \varrho(g).$$

Упражнение 2. Докажите, что P_{inv} — проектор на V_1.

Кроме того, P_{inv} — сплетающий оператор:

$$P_{inv} \circ \varrho(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho(g)^{-1} \circ P \circ \varrho(gh) = \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \varrho(u(h^{-1}))^{-1} \circ P \circ \varrho(u) = \varrho(h) \circ P_{inv} \tag{1}$$

для всех $h \in G$.

Значит, V распадается в прямую сумму подпредставлений V_1 и $\mathrm{Ker} f$. Индукция в конечномерном случае и применение леммы Цорна в бесконечномерном случае завершает доказательство.

■

Задача 3. Приведите пример, когда утверждение теоремы нарушается для конечной группы при $|G|$ делящимся на характеристику поля.

Категория с такими свойствами называется *полупростой.* В ней достаточно описать морфизмы между неприводимыми объектами. Но следующая теорема верна в другой общности.

Теорема 2. *(Лемма Шура) Пусть поле алгебраически замкнуто, V_1, V_2 — неприводимые представления G. Тогда размерность пространства сплетающих операторов*

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \begin{cases} 1 & V_1 \cong V_2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $f : V_1 \to V_2$ — ненулевой сплетающий оператор. Тогда $\mathrm{Ker} f \neq V_1$ и $\mathrm{Im} f \neq 0$. В силу неприводимости V_1 и V_2 это означает, что $\mathrm{Ker} f = 0$, $\mathrm{Im} f = V_2$, а значит f — изоморфизм.

Осталось вычислить $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V)$ для неприводимого представления V. Пространство $\mathrm{Hom}_G(V, V)$ содержит одномерное подпространство скаляров $\{\lambda Id\}$. Пусть f — произвольный сплетающий оператор, тогда операторы $f - \lambda Id$ — тоже сплетающие. Но в силу алгебраической замкнутости для некоторого λ $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id) \neq 0$. Значит, поскольку любой ненулевой сплетающий оператор — изоморфизм, $f = \lambda Id$.

■

Упражнение 3. Пусть представления $V_1, \ldots, V_k$ — неприводимы, пусть

$$U = n_1 V_1 \oplus n_2 V_2 \oplus \cdots \oplus n_k V_k, \qquad V = m_1 V_1 \oplus m_2 V_2 \oplus \cdots \oplus m_k V_k.$$

Тогда в предположениях леммы Шура $\dim \mathrm{Hom}_G(U, V) = \sum m_i n_i$.

Указание: Докажите, что

$$\mathrm{Hom}_G(U_1 \oplus U_2, V) \cong \mathrm{Hom}_G(U_1, V) \oplus \mathrm{Hom}_G(U_2, V); \quad \mathrm{Hom}_G(U, V_1 \oplus V_2) \cong \mathrm{Hom}_G(U, V_1) \oplus \mathrm{Hom}_G(U, V_2).$$

Представления абелевых групп

Будем предполагать, что основное поле — поле комплексных чисел.

Предложение 1. *Неприводимое конечномерное представление абелевой группы — одномерно.*

Действительно, набор коммутирующих операторов в конечномерном пространстве имеет общий собственный вектор.

Заметим, что $GL(1) \cong \mathbb{C}^*$ как группа. Таким образом, неприводимое представление абелевой группы A — отображение

$$\chi : A \to \mathbb{C}^*, \quad \text{такое что } \chi(ab) = \chi(a)\chi(b), \ a, b \in A.$$

Определение 2. Гомоморфизм из группы в $\mathbb{C}^*$ называется *характером* группы.

Ясно, что характер группы (не обязательно абелевой) — то же самое, что ее одномерное представление.

Характеры любой группы сами образуют абелеву группу по умножению:

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g), \ g \in G.$$

При этом произведение характеров соответствует тензорному произведению соответствующих одномерных представлений.

Упражнение 4. Пусть A — конечная абелева группа. Тогда группа характеров A изоморфна A.

Этот изоморфизм не канонический. Он напоминает изоморфизм конечномерного векторного пространства и двойственного к нему.

Определение 3. Группа характеров абелевой группы A называется *двойственной* абелевой группой и обозначается A^*.

Предложение 2. *(двойственность Понтрягина) Пусть A — конечная абелева группа. Тогда $(A^*)^*$ канонически изоморфна A.*

Изоморфизм $A \to (A^*)^*$ строится так: каждому элементу $a \in A$ сопоставляется гомоморфизм группы характеров $(A)^* \to \mathbb{C}^*$, переводящий характер χ в число $\chi(a)$. Легко проверить, что для конечной A это отображение — изоморфизм.

Упражнение 5. Группа характеров произвольной группы G изоморфна $(G/[G,G])^*$.

Упражнение 6. Пусть χ — нетривиальный характер группы G. Тогда

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Это наблюдение приводит к важному следствию. Определим эрмитово скалярное произведение на комплекснозначных функциях на G, полагая

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}. \tag{2}$$

Упражнение 7. Характеры группы ортонормированы относительно этого скалярного произведения.

Это утверждение и подлежит обобщению.

Матричные элементы и характеры группы

Будем предполагать, что группа конечна и основное поле — $\mathbb{C}$.

На предыдущей лекции было определено инвариантное скалярное произведение на пространстве V представления ϱ конечной группы G. Выберем ортонормированный базис в пространстве V и обозначим $\varrho^{ij}(g)$ матрицу оператора $\varrho(g)$ в этом базисе. Полученный набор функций на группе ϱ^{ij} назовем *матричными элементами* представления. В силу инвариантности скалярного произведения матрицы $\varrho^{ij}(g)$ унитарны, то есть $\varrho^{ij}(g^{-1}) = \overline{\varrho^{ji}}$.

Теорема 3. *Пусть ϱ_1, ϱ_2 — неизоморфные неприводимые представления в пространствах V_1, V_2. Тогда для их матричных элементов выполнено $\left\langle \varrho_1^{i_1 j_1}, \varrho_2^{i_2 j_2} \right\rangle = 0$, $\left\langle \varrho_\alpha^{i_1 j_1}, \varrho_\alpha^{i_2 j_2} \right\rangle = \frac{1}{\dim V_\alpha} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}$.*

Доказательство. Пусть $F : V_1 \to V_2$ — произвольное отображение. Тогда, аналогично (1),

$$F_{inv} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varrho_2(g^{-1}) \circ F \circ \varrho_1(g)$$

сплетающий оператор.

Пусть $F = E_{j_1j_2}$ — матричная единица ($((E_{ab})^{ij} = 1$ при $i = a$, $j = b$ и нулю в остальных случаях). Тогда

$$(E_{j_1j_2})^{i_1i_2}_{inv} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varrho_2^{j_2i_2}(g^{-1})\varrho_1^{i_1j_1}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varrho_2^{i_2j_2}(g)\varrho_1^{i_1j_1}(g) = \left\langle \varrho_1^{i_1j_1}, \varrho_2^{i_2j_2} \right\rangle.$$

Поскольку V_1 не изоморфно V_2, по лемме Шура $(E_{j_1j_2})_{inv} = 0$, откуда следует первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда по лемме Шура всякий сплетающий оператор — скаляр. Чтобы вычислить скаляр $(E_{j_1j_2})_{inv}$ заметим, что

$$\operatorname{tr} F_{inv} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{tr}\left(\varrho(g)^{-1} \circ F \circ \varrho(g)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \operatorname{tr} F = \operatorname{tr} F,$$

а значит, $\operatorname{tr}\,(E_{j_1j_2})_{inv} = \delta_{j_1j_2}$ и $(E_{j_1j_2})_{inv} = \frac{1}{\dim V}\delta_{j_1j_2}$. Отсюда следует второе утверждение теоремы.

■

Недостаток матричных элементов — зависимость от базиса.

Определение 4. *Характером* представления ϱ группы G называется функция $\chi_\varrho : G \to \mathbb{C}$, сопоставляющая элементу $g \in G$ число $\operatorname{tr}\varrho(g)$.

Следствие 1. *Характеры неприводимых представлений ортонормированы относительно скалярного произведения (2).*

Пример 1. Характер регулярного представления

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & g = e \\ 0 & g \neq e \end{cases}$$

Упражнение 8. Докажите, что $\chi_{\varrho_1\oplus\varrho_2} = \chi_{\varrho_1} + \chi_{\varrho_2}$, а $\chi_{\varrho_1\otimes\varrho_2} = \chi_{\varrho_1}\chi_{\varrho_2}$.

Теорема 4. *Кратность вхождения неприводимого представления ϱ в регулярное представление R равна размерности пространства представления V.*

Доказательство.

Искомая кратность равна

$$\langle \chi_\varrho, \chi_R \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_\varrho(g)\overline{\chi_R(g)} = \chi_\varrho(e) = \dim V.$$

■

Разложение регулярного представления на неприводимые приводит к важному следствию.

Следствие 2. *(Теорема Бернсайда) Множество неприводимых представлений с точностью до изоморфизма $Irrep_{\mathbb{C}}(G)$ — конечно, причем*

$$\sum_{V\in Irrep_{\mathbb{C}}(G)} (\dim V)^2 = |G|$$

Задача 4. Опишите неприводимые представления группы диэдра D_n.

Указание: Размерность этих представлений не превышает 2.