ЛЕКЦИЯ 4

1. Групповая алгебра

Определение 1. *Групповой алгеброй* $K[G]$ группы G над полем K называется алгебра формальных линейных комбинаций элементов G вида $\sum_{g\in G}\lambda_g[g]$, $\lambda_g\in K$ с естественным умножением $[g_1]\cdot[g_2]=[g_1g_2]$.

Группа G действует на пространстве $K[G]$ так: $\varrho(g)x=[g]\cdot x$. Это представление изоморфно R посредством отождествления $[g]\in K[G]$ с $e_g\in R$.

Упражнение 1. Докажите, что при $K=\mathbb{C}$ всякий сплетающий оператор в регулярном представлении $R\cong\mathbb{C}[G]$ имеет вид $x\to xa$, $a\in\mathbb{C}[G]$.

В частности, алгебра сплетающих операторов $\mathrm{Hom}_G(R,R)$ изоморфна $\mathbb{C}[G]$.

Подпредставления R при этом соответствуют левым идеалам $K[G]$. В частности, это дает возможность описать левые идеалы $\mathbb{C}[G]$.

Упражнение 2. Докажите, что всякий левый идеал в $\mathbb{C}[G]$ — имеет вид $\mathbb{C}[G]c$ для некоторого $c\in\mathbb{C}[G]$, такого что $c^2=c$. Какому сплетающему оператору соответствует c?

Упражнение 3. Докажите, что идеалы $\mathbb{C}[G]c_1$ и $\mathbb{C}[G]c_2$ соответствуют изоморфным представлениям тогда и только тогда, когда c_1 и c_2 — сопряжены в $\mathbb{C}[G]$.

2. Представления S_n (продолжение)

Пусть T — нумерованная диаграмма Юнга из n клеток, $\mathcal{A}_T$ — подгруппа перестановок, сохраняющих строки T, $\mathcal{B}_T$ — подгруппа перестановок, сохраняющих столбцы T. Определим следующие элементы $\mathbb{C}[S_n]$:

$$\mathbf{a}_T=\sum_{\sigma\in\mathcal{A}_T}[\sigma],\qquad \mathbf{b}_T=\sum_{\sigma\in\mathcal{B}_T}\mathrm{sgn}(\sigma)[\sigma],\qquad \mathbf{c}_T=\mathbf{a}_T\mathbf{b}_T.$$

Теорема 1.

i) $(\mathbf{c}_T)^2=\mu\mathbf{c}_T$, *причем* $\mu\neq 0$.
ii) *Идеал* $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_T$ *не содержит меньших идеалов.*
iii) *Если* T *и* T' *соответствуют разным диаграммам Юнга, то идеалы* $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_T$ *и* $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_{T'}$ *не совмещаются умножением справа на элемент* $\mathbb{C}[S_n]$.

Упражнение 4. Докажите, что эта теорема эквивалентна теореме 2 из предыдущей лекции.

Заметим также, что если T и T' — две нумерации одной диаграммы, отличающиеся перестановкой σ, то $\mathbf{c}_{T'}=[\sigma^{-1}]\mathbf{c}_T[\sigma]$, а значит, соответствующие представления — изоморфны.

Доказательство. Определим порядок на диаграммах Юнга так. Будем говорить, что диаграмма $\Gamma'=(f'_1,\dots,f'_{k'})$ больше диаграммы $\Gamma=(f_1,\dots,f_k)$ если найдется $1\le r\le\min(k,k')$, такое что $f'_i=f_i$ при $i<r$ и $f'_r>f_r$.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma'>\Gamma$ *— диаграммы Юнга из* n *клеток,* T *и* T' *— их нумерации. Тогда либо найдутся два номера в одной строке* Γ' *и одном столбце* Γ*, либо* $\Gamma'=\Gamma$*, а* T *и* T' *отличаются перестановкой вида* $ab:T\to T'$*, где перестановка* a *сохраняет строки диаграммы, а перестановка* b *сохраняет столбцы диаграммы.*

Лемма доказывается индукцией по количеству строк диаграмм. ■

Следствие 1.

i) *Пусть* T *— нумерованная диаграмма,* s *— перестановка. Тогда либо* $s=ab$*, где* $a\in\mathcal{A}_T$*,* $b\in\mathcal{B}_T$*, либо найдутся перестановки* $a\in\mathcal{A}_T$*,* $b\in\mathcal{B}_T$*, такие что* $\mathrm{sgn}(b)=-1$ *и* $as=sb$.
ii) *Пусть* $\Gamma'>\Gamma$*,* T *и* T' *— нумерации этих диаграмм,* s *— перестановка. Тогда найдутся перестановки* $a\in\mathcal{A}_{T'}$*,* $b\in\mathcal{B}_T$*, такие что* $\mathrm{sgn}(b)=-1$ *и* $as=sb$.

Действительно, в качестве перестановок a и b, таких что $\mathrm{sgn}(b)=-1$ и $as=sb$ можно взять $b=(i_1i_2)$, $a=(s(i_1),s(i_2))$. Чтобы a и b удовлетворяли условию, связанному с диаграммами, i_1 и i_2 следует выбрать с помощью леммы 1, примененной к T и $s(T)$ в (i) и к T и $s(T')$ в (ii). ■

Используя это следствие, вычислим $\mathbf{c}_T$. Пусть $\mathbf{c}_T = \sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma[\sigma]$. Мы знаем, что $a\mathbf{c}_T = \mathbf{c}_T$ для всех $a \in \mathcal{A}_T$ и что $\mathbf{c}_T b = \operatorname{sgn}(b)\mathbf{c}_T$ для всех $b \in \mathcal{B}_T$. Значит, $\lambda_{a\sigma} = \lambda_\sigma$, $\lambda_{\sigma b} = \operatorname{sgn}(b)\lambda_\sigma$ и $\lambda_{ab} = \operatorname{sgn}(b)\lambda_e$, где $a \in \mathcal{A}_T$, $b \in \mathcal{B}_T$.

Пусть теперь σ не представляется в виде ab, $a \in \mathcal{A}_T$, $b \in \mathcal{B}_T$. Тогда по пункту (i) найдутся $a \in \mathcal{A}_T$ и нечетное $b \in \mathcal{B}_T$, такие что $a\sigma = \sigma b$. При этом $\lambda_{a\sigma} = \lambda_\sigma$, $\lambda_{\sigma b} = -\lambda_\sigma$, а поскольку эти числа совпадают, $\lambda_\sigma = 0$.

Осталось вычислить коэффициент при единице λ_e.

Упражнение 5. Докажите, что если $\sigma \in S_n$ представляется в виде ab, $a \in \mathcal{A}_T$, $b \in \mathcal{B}_T$, то такое представление единственно.

Теперь из определения $\mathbf{c}_T$ следует, что $\lambda_e = 1$. Подведем итог.

Лемма 2.

i) $\mathbf{c}_T = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}_T\\ b\in\mathcal{B}_T}} \operatorname{sgn}(b)[ab]$.

ii) *Если для $c \in \mathbb{C}[S_n]$ и нумерованной диаграммы T выполнено $ac = c$ для всех $a \in \mathcal{A}_T$, $cb = \operatorname{sgn}(b)c$ для всех $b \in \mathcal{B}_T$, то c пропорционален $\mathbf{c}_T$.*

iii) *Если для $c \in \mathbb{C}[S_n]$ и нумерованных диаграмм $T' > T$ выполнено $ac = c$ для всех $a \in \mathcal{A}_{T'}$, $cb = \operatorname{sgn}(b)c$ для всех $b \in \mathcal{B}_T$, то $c = 0$.*

Действительно, явный вид $\mathbf{c}_T$ использовался только для вычисления коэффициента при единице, поэтому верно (ii). Заменяя в этом рассуждении пункт (i) следствия 1 на пункт (ii), получим (iii). ■

Перейдем к доказательству теоремы. По пункту (ii) леммы 2 $\mathbf{c}_T \cdot \mathbf{c}_T$ пропорционален $\mathbf{c}_T$. Вычислим коэффициент пропорциональности μ. Для этого вычислим двумя способами след действия $\mathbf{c}_T$ на $\mathbb{C}[S_n]$ умножением справа (оператора c_T из предыдущей лекции).

С одной стороны, так как $(c_T)^2 = \mu c_T$, $\operatorname{tr} c_T = \mu \cdot \dim \operatorname{Im} c_T$. С другой стороны, след действия любого элемента $\mathbb{C}[S_n]$ на $\mathbb{C}[S_n]$ легко вычислить.

Упражнение 6. След действия элемента $\sum_{g\in G} \lambda_g[g]$ на $\mathbb{C}[G]$ равен $\lambda_e|G|$

Таким образом, $\mu \cdot \dim \operatorname{Im} c_T = n!$, в частности, $\mu \neq 0$, что завершает доказательство (i).

Пусть идеал $\mathbb{C}[S_n]c$, $c^2 = c$ содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_T$.

Упражнение 7. Докажите, что в этом случае $\mathbf{c}_T\, c = c\, \mathbf{c}_T = c$.

Значит, $\mathbf{c}_T\, c\, \mathbf{c}_T = c$. Но по пункту (ii) леммы 2 $\mathbf{c}_T\, c\, \mathbf{c}_T$ пропорционален $\mathbf{c}_T$. То есть идеалы совпадают, что доказывает (ii).

Пусть $\Gamma' > \Gamma$ — две диаграммы, T и T' — их нумерации. Предположим, что $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_T = \mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_{T'}\, x$ для некоторого $x \in \mathbb{C}[S_n]$. Тогда $\mathbf{c}_{T'}$ содержится в идеале $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{c}_T$, $\mathbf{c}_{T'} = y\mathbf{c}_T$. Но по пункту (iii) леммы 2 $\mathbf{c}_{T'} y \mathbf{c}_T = 0$ для всех $y \in \mathbb{C}[S_n]$. Противоречие доказывает пункт (iii).

■

Задача 1. Докажите, что идеалы $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{a}_T\mathbf{b}_T$ и $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{b}_T\mathbf{a}_T$ соответствуют изоморфным представлениям.

Задача 2. Пусть Γ — диаграмма Юнга, Γ^* — "сопряженная" диаграмма, строки которой соответствуют столбцам Γ и наоборот (Γ и Γ^* отличаются отражением относительно диагонали). Докажите, что представления, соответствующие этим диаграммам отличаются тензорным умножением на знаковое представление.