ЛЕКЦИЯ 5

Комплексные представления S_n (продолжение)

Рассмотрим подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$, состоящую из перестановок подмножества $\{1, \dots, n-1\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Всякое представление S_n можно ограничить на S_{n-1} — рассмотреть действие только элементов подгруппы. Разумеется, неприводимое представление S_n при этом может перестать быть неприводимым. Цель этой лекции — описать разложения таких представлений S_{n-1} в прямую сумму неприводимых.

Определение 1. Диаграмма $\Gamma' = (f'_1, \dots, f'_{r'})$ является *поддиаграммой* диаграммы $\Gamma = (f_1, \dots, f_r)$ если $r' \le r$ и $f'_i \le f_i$, $i = 1 \dots r'$.

Другими словами, Γ' является поддиаграммой Γ если множество клеток Γ' является подмножеством множества клеток Γ.

Теорема 1. *Представление ϱ_Γ группы S_n, ограниченное на S_{n-1}, изоморфно прямой сумме по поддиаграммам из $n-1$ клетки $\Gamma' \subset \Gamma$ представлений $\varrho_{\Gamma'}$.*

Доказательство этой теоремы разобьем на две части: докажем, что представление $\varrho_{\Gamma'}$ содержится в ограничении ϱ_Γ тогда и только тогда, когда Γ'—поддиаграмма Γ и что кратность неприводимых подпредставлений S_{n-1} в ограничении неприводимых представлений S_n равна единице.

Упражнение 1. Пусть T — нумерация диаграммы Γ из n клеток. Докажите, что оператор $c_T \in \mathbb{C}[S_n]$ действует нулем на неприводимом представлении $\varrho_{\Gamma'}$ тогда и только тогда, когда $\Gamma' \neq \Gamma$.

Докажем, что если Γ' — поддиаграмма Γ из $n-1$ клетки, то ограничение представления ϱ_Γ на S_{n-1} содержит $\varrho_{\Gamma'}$. Для этого занумеруем Γ и Γ' так, чтобы лишняя клетка в Γ имела номер n, назовем соответствующие нумерованные диаграммы T и T'. Тогда $a_T a_{T'} = a_{T'} a_T = a_T$, $b_T b_{T'} = b_{T'} b_T = b_T$.

Заметим, что $b_T a_T a_{T'} b_{T'} b_T a_T = b_T a_T b_T a_T \neq 0$ в $\mathbb{C}[S_n]$, а значит $a_{T'} b_{T'} b_T a_T \neq 0$. Но $a_{T'} b_{T'} = c_{T'}$, а $\mathbb{C}[S_n] b_T a_T$ — представление ϱ_Γ. Значит, $c_{T'}$ действует на ϱ_Γ не нулем и ϱ_Γ при ограничении на S_{n-1} содержит $\varrho_{\Gamma'}$.

Задача 1. Докажите, что если ограничение ϱ_Γ на S_{n-1} содержит подпредставление $\varrho_{\Gamma'}$, то Γ' — поддиаграмма Γ.

Осталось доказать, что кратности этих подпредставлений равны единице.

Алгебра Гекке

Напомню, что групповая алгебра $\mathbb{C}[G]$ определялась как алгебра формальных линейных комбинаций $\sum \lambda_g [g]$ элементов G. С другой стороны, элементы $\mathbb{C}[G]$ можно рассматривать как комплекснозначные функции на G, сопоставляющие элементу $g \in G$ число λ_g.

Упражнение 2. Докажите, что произведение двух функций как элементов $\mathbb{C}[G]$ записывается так:

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h^{-1}) f_2(hg).$$

Теорема 2. *Пусть $V_1, \dots, V_n$ — все неприводимые представления группы G. Тогда алгебра $\mathbb{C}[G]$ изоморфна прямой сумме матричных алгебр $\mathrm{End}(V_i)$.*

Доказательство.

Отображение $\mathbb{C}[G] \to \bigoplus \mathrm{End}(V_i)$ устроено так: $\mathbb{C}[G]$ действует на представлении V_i, а значит, отображается в алгебру $\mathrm{End}(V_i)$. После чего, рассматривается прямая сумма таких отображений.

То, что это отображение — изоморфизм следует из того, что матричные элементы неприводимых представлений образуют базис в пространстве функций на группе.

■

Следствие 1. *Действие $\mathbb{C}[G]$ на неприводимом представлении V группы G — сюръективное отображение $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$.*

Пусть теперь $H \subset G$ — некоторая подгруппа, V — неприводимое представление G. Ограничим V на H и выделим тривиальное подпредставление — по теореме Машке можно разложить V в прямую сумму подпредставлений V_0 и V' группы H, так чтобы H действовал на V_0 тождественными преобразованиями, а в V' не содержалось тривиальных подпредставлений. Рассмотрим вложение алгебр $\mathrm{End}(V_0) \hookrightarrow \mathrm{End}(V)$ в виде блочных матриц, переводящих V_0 в себя, а V' — в ноль. Мы знаем, что отображение $\mathbb{C}[G] \to \mathrm{End}(V)$ — сюръективно, а поэтому можем задаться вопросом о праобразе $\mathrm{End}(V_0)$ в $\mathbb{C}[G]$.

Определение 2. *Алгеброй Гекке* $\mathcal{H}(G, H)$ называется подпространство $\mathbb{C}[G]$, состоящее из таких элементов x, что $[h]x = x[h] = x$ для всех $h \in \mathbb{C}[H] \subset \mathbb{C}[G]$.

Упражнение 3. Докажите, что элементы алгебры Гекке как функции на G — функции, постоянные на двойных смежных классах $H \setminus G/H$.

Упражнение 4. Докажите, что элемент $e_H = \sum\limits_{h \in H} [h]$ принадлежит $\mathcal{H}(G, H)$ и является единицей этой алгебры.

Упражнение 5. Докажите, что элементы вида $e_H x e_H$, где $x \in \mathbb{C}[G]$ принадлежат $\mathcal{H}(G, H)$, и что все элементы $\mathcal{H}(G, H)$ имеют вид $e_H x e_H$.

Отсюда видно, что $\mathcal{H}(G, H)$ действительно является подалгеброй $\mathbb{C}[G]$.

Упражнение 6. Докажите, что если подгруппа H — нормальна в G, то $\mathcal{H}(G, H) \cong \mathbb{C}[G/H]$.

Таким образом, алгебра Гекке — обобщение понятия факторгруппы на случай ненормальной подгруппы. Вернемся к исходному вопросу.

Предложение 1. *Образ* $\mathcal{H}(G, H)$ *в* $\mathrm{End}(V)$ *равен* $\mathrm{End}(V_0)$.

Действительно, это следует из упражнения 5 с учетом того, что образ e_H в $\mathrm{End}(V)$ — проектор на V_0.

Вернемся к кратности неприводимых представлений S_{n-1} в ограничении неприводимого представления S_n. Из сказанного выше следует, что квадрат кратности тривиального представления (размерность $\mathrm{End}(V_0)$) не превышает размерность алгебры Гекке $\mathcal{H}(S_n, S_{n-1})$, то есть количество двойных смежных классов $S_{n-1} \setminus S_n/S_{n-1}$.

Упражнение 7. Докажите, что множество двойных смежных классов $S_{n-1} \setminus S_n/S_{n-1}$ состоит из двух элементов — подгруппы S_{n-1} и дополнения к ней.

Задача 2. Вычислите $\mathcal{H}(S_n, S_{n-1})$.

Тем самым, кратность тривиального представления не более единицы.

Аналогичным, но технически более сложным способом можно доказать, что кратность произвольного неприводимого представления H не более единицы. ■

Теорема 1 предлагает рекурсивный способ вычисления размерностей неприводимых представлений S_n: зная размерности в случае S_{n-1} мы легко можем вычислить размерности в случае S_n. Имеется и более явная формула.

Пусть Γ — диаграмма Юнга из n клеток. Назовем *крюком* с вершиной в данной клетке множество клеток справа от данной клетки, под ней, а также саму клетку. *Длиной* крюка назовем количество клеток в нем.

Теорема 3. (Формула крюков) *Размерность представления* ϱ_Γ *группы* S_n *равна* $n!$, *деленному на произведение длин всех крюков.*

Задача 3. Докажите формулу крюков.