ЛЕКЦИЯ 6

Двойственность Шура–Вейля

Цель этой лекции — используя представления S_n построить серию неприводимых представлений бесконечной группы GL_m.

Пусть V — m–мерное пространство. Рассмотрим пространство

$$W_{mn} = V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}.$$

Группа S_n действует на этом пространстве перестановками сомножителей, а группа GL_m действует преобразованиями пространства V. То есть, для $\sigma \in S_n$, $A \in GL_m$

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad A(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = A(v_1) \otimes \cdots \otimes A(v_n).$$

Ясно, что эти действия коммутируют. Другими словами, на W_{mn} действует группа $S_n \times GL_m$.

Обозначим R_Γ пространство неприводимого представления ϱ_Γ группы S_n, связанного с диаграммой из n клеток Γ.

Предложение 1.

$$W_{mn} = \bigoplus_{\Gamma} R_\Gamma \otimes V_\Gamma,$$

где V_Γ — представления GL_m.

Доказательство. Это предложение следует из двух более простых утверждений.

Упражнение 1. Пусть W — конечномерное представление конечной группы G. Тогда $W \cong \bigoplus_i U_i \otimes V_i$, где U_i — различные неприводимые представления G, и размерность V_i равна кратности представления U_i в W.

Тем самым, пространства V_Γ определены.

Упражнение 2. Докажите, что в условиях предыдущего упражнения всякий сплетающий оператор из W в себя — линейная комбинация операторов из $\mathrm{End}(V_i)$.

Значит, всякий элемент GL_m действует на W_{mn} линейной комбинацией операторов из $\mathrm{End}(V_\Gamma)$, то есть действует на V_Γ.

■

Упражнение 3. Пусть G_1, G_2 — группы, одна из которых конечна. Докажите, что всякое неприводимое представление $G_1 \times G_2$ — произведение $U \otimes V$ неприводимого представления U группы G_1 и неприводимого представления V группы G_2.

Предложение 2. $V_\Gamma \neq 0$ *тогда и только тогда, когда количество строк диаграммы* Γ *не превышает* m.

Доказательство. Пусть T — некоторая нумерация Γ. Мы знаем, что ϱ_Γ является подпредставлением представления W тогда и только тогда, когда $c_T = a_T b_T \in \mathbb{C}[S_n]$ (вариант: $b_T a_T$) действует на W не нулем.

Если диаграмма Γ имеет более m строк, то альтернирование по первому столбцу, а следовательно, b_T действует на W_{mn} нулем, значит ϱ_Γ не содержится в W_{mn} и $V_\Gamma = 0$.

Если диаграмма Γ имеет не более m строк, то построим вектор, на котором $b_T a_T$ действует не нулем. Пусть $T(i)$ — номер строки, в которой находится число i, пусть $v_1, \ldots, v_m$ — базис в V. Тогда рассмотрим вектор

$$v_T = v_{T(1)} \otimes \cdots \otimes v_{T(n)}. \tag{1}$$

Ясно, что $a_T v_T = v_T$, а $b_T v_T$ — линейная комбинация произведений базисных векторов, в которую v_T входит с коэффициентом 1. Значит, $b_T a_T v_T \neq 0$ и $V_\Gamma \neq 0$. ■

Теорема 1. *Представление V_Γ — неприводимо.*

Доказательство. Доказательство основано на двух леммах, которые сами по себе часто называются двойственностью Шура–Вейля.

Лемма 1. *Всякий оператор $W_{mn} \to W_{mn}$, коммутирующий с действием S_n — линейная комбинация действий элементов GL_m.*

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{End}(W_{mn}) = W_{mn} \otimes W_{mn}^* = (V \otimes V^*)^{\otimes n} = (\operatorname{End}(V))^{\otimes n}.$$

При этом операторы, коммутирующие с S_n — симметричные тензоры $S^n(\operatorname{End}(V)) \subset (\operatorname{End}(V))^{\otimes n}$, а GL_m действует диагональными тензорами вида $A \otimes \cdots \otimes A$.

Упражнение 4. Всякий симметричный тензор — линейная комбинация диагональных.

■

Лемма 2. *Всякий оператор $W_{mn} \to W_{mn}$, коммутирующий с действием GL_m — линейная комбинация действий элементов S_n.*

Доказательство. Докажем более общее утверждение. Пусть G — конечная группа, W — ее представление, $M = \operatorname{Hom}_G(W, W)$ — пространство сплетающих операторов. Тогда всякий оператор из $\operatorname{End}(V)$, коммутирующий с элементами M — действие некоторого элемента $\mathbb{C}[G]$.

Разложим W по неприводимым представлениям U_i группы G: $W = \bigoplus_i U_i \otimes V_i$. Мы знаем (упражнение 2), что пространство сплетающих операторов $M = \bigoplus_i \operatorname{End}(V_i)$.

Упражнение 5. Докажите, что операторы в пространстве $\bigoplus_i U_i \otimes V_i$, коммутирующие с операторами из $\bigoplus_i \operatorname{End}(V_i)$ принадлежат $\bigoplus_i \operatorname{End}(U_i)$.

Для доказательства общего утверждения теперь вспомним, что отображение $\mathbb{C}[G] \to \bigoplus_i \operatorname{End}(U_i)$ — сюръективно (оно было бы изоморфизмом, если бы все неприводимые представления входили в W). А для доказательства леммы еще воспользуемся тем, что по лемме 1 простанство сплетающих операторов $\operatorname{Hom}_{S_n}(W_{mn}, W_{mn})$ порождено действием элементов GL_m. ■

Пусть представление V_{Γ_0} — приводимо, $V_{\Gamma_0} = V_1 \oplus V_2$. Тогда рассмотрим оператор из $\operatorname{End}(W)$, действующий тождественно на всех R_Γ, на V_Γ для $\Gamma \neq \Gamma_0$ и на V_1, и действующий нулем на V_2. Он коммутирует с действием GL_m, но не совпадает с действием никакого элемента $\mathbb{C}[S_n]$.

Теорема 2. *Если $\Gamma \neq \Gamma'$ — диаграммы, у которых не более m строк, то V_Γ и $V_{\Gamma'}$ не изоморфны.*

Упражнение 6. Пусть Γ и Γ' имеют одинаковое количество клеток. Выведите утверждение теоремы для этого случая из леммы 1.

Доказательство. Выберем базис $v_1, \dots, v_m$ в пространстве V и запишем элементы GL_m матрицами. Пусть $H \subset GL_m$ — подгруппа диагональных матриц. Эта подгруппа коммутативна, в любом представлении GL_m найдется общий собственный вектор подгруппы H. Мы различим представления V_Γ по действию подгруппы H на общие собственные векторы.

Рассмотрим вектор $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \subset M_{mn}$. Он является общим собственным вектором подгруппы H. Матрица $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \subset H$ действует на этот вектор умножением на $\lambda_1^{\mu_1} \dots \lambda_m^{\mu_m}$, где μ_s — количество чисел i_j, равных s. Поскольку векторы указанного вида образуют базис в пространстве W_{mn}, на всякий общий собственный вектор в W_{mn} матрицы $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ действуют умножением на $\lambda_1^{\mu_1} \dots \lambda_m^{\mu_m}$. То же самое верно и для любого подпространства W_{mn}, в частности V_Γ. Набор чисел $(\mu_1, \dots, \mu_m)$ назовем *весом* общего собственного вектора.

Упорядочим множество весов лексикографически (как ранее упорядочили диаграммы Юнга). Будем говорить, что $(\mu_1, \dots, \mu_m) > (\mu'_1, \dots, \mu'_m)$, если для некоторого $1 \le r \le m$ выполнено $\mu_i = \mu'_i$ при $i < r$ и $\mu_r = \mu'_r$. Максимальный вес в представлении GL_m будем называть *старшим весом* этого представления. Ясно, что изоморфные представления имеют одинаковые старшие веса. Поэтому следующая лемма завершает доказательство теоремы.

Лемма 3. *Пусть $\Gamma = (f_1, \dots, f_r)$ — диаграмма Юнга, $r \le m$. Тогда старший вес представления V_Γ равен $(f_1, \dots, f_r, 0, \dots, 0)$.*

Доказательство. Пусть T — нумерация диаграммы Γ. Тогда оператор c_T действует ненулевой константой на $V_\Gamma \subset W_{mn}$ и нулем на $V_{\Gamma'}$ при $\Gamma' \neq \Gamma$. Кроме того, c_T сохраняет подпространства векторов данного веса. Значит, чтобы убедиться, что данный вес — старший достаточно проверить, что c_T действует не нулем на подпространстве векторов данного веса и нулем на векторах большего веса.

Но мы знаем, что b_T действует нулем на векторах большего веса, а сопряженный к c_T оператор $b_T a_T$ действует не нулем на векторе v_T (см. (1)). ■

Упражнение 7. Докажите, что в V_Γ имеется базис из общих собственных векторов H.

Задача 1. Изоморфны ли следующие представления GL_m представлениям V_Γ:
одномерные $\det : GL_m \to \mathbb{C}^*$, $(\det)^k : GL_m \to \mathbb{C}^*$ $(k \in \mathbb{Z})$,
m–мерные $V \otimes (\det)^k$, V^*, $V^* \otimes (\det)^k$?

Задача 2. GL_m действует на пространстве $\operatorname{End}(V)$ сопряжением. Разложите это представление в прямую сумму V_Γ.