ЛЕКЦИЯ 8

Остановимся подробнее на алгебрах Гекке. Пусть H — подгруппа G, ϱ — представление H в пространстве V. Напомню, что алгебра Гекке $\mathcal{H}(G,H,V)$ определялась как алгебра эндоморфизмов индуцированного представления $\mathrm{Ind}_H^G V$. По теореме 1 из предыдущей лекции пространство $\mathcal{H}(G,H,V)$ изоморфно пространству функций на группе $F : G \to \mathrm{End}(V)$ со значениями в эндоморфизмах пространства V, таких что

$$F(h_1 g h_2) = \varrho(h_1) \circ F(g) \circ \varrho(h_2).$$

При этом умножение задается сверткой соответствующих функций:

$$(F_2 \star F_1)(g) = \sum_{r\in G} F_2(r^{-1}) \circ F_1(rg).$$

1. Алгебры Гекке $GL_2(\mathbb{F}_q) \supset B(\mathbb{F}_q)$

Пусть $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$, $H = B(\mathbb{F}_q)$ — подгруппа верхнетреугольных матриц. Для начала пусть представление тривиально. Тогда пространство $\mathcal{H}(G,H,\mathbb{C})$ изоморфно пространству комплекснозначных функций на G, постоянных на двойных смежных классах.

Упражнение 1. Двойных смежных классов $H\setminus G/H$ — два: H и дополнение к H.

В качестве представителя нетривиального двойного смежного класса выберем матрицу $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Алгебра $\mathcal{H}(G,H,\mathbb{C})$ — двумерна, базис в ней составляют функции

$$F_e(g) = \begin{cases} 1 & g\in H \\ 0 & g\notin H \end{cases} \qquad F_s(g) = \begin{cases} 0 & g\in H \\ 1 & g\notin H \end{cases}.$$

Вычислим произведения базисных элементов. Пусть F — произвольный элемент $\mathcal{H}(G,H,\mathbb{C})$. Тогда

$$(F_e \star F) = \sum_{r\in G} F_e(r^{-1}) \circ F(rg) = \sum_{r\in H} F(rg) = |H|\cdot F(g)$$

и, аналогично, $F \star F_e = |H|\cdot F$. Значит, $T_e = F_e/|H|$ — единица алгебры Гекке.

Осталось вычислить $F_s^2 = F_s \star F_s$.

$$F_s^2(e) = \sum_{r\in G} F_s(r^{-1}) \circ F_s(r) = \sharp\{r\in G|\ r\notin H\} = |G| - |H|,$$

$$F_s^2(s) = \sum_{r\in G} F_s(r^{-1}) \circ F_s(rs) = \sharp\{r\in G|\ r\notin H;\ rs\notin H\}.$$

Множество $\{r|\ r\notin H;\ rs\notin H\}$ состоит из матриц с ненулевыми элементами в нижней строке.

Упражнение 2. Докажите, что количество таких матриц равно $|G| - 2|H|$.

Наконец заметим, что в нашем случае $|G| = (q+1)|H|$. Значит, $F_s^2 = (q-1)|H|\cdot F_s + q|H|\cdot F_e$, и, полагая $T_s = F_s/|H|$, получим $T_s^2 = (q-1)\cdot T_s + q\cdot T_e$, то есть

$$(T_s + T_e)(T_s - q\cdot T_e) = 0. \tag{1}$$

Пусть теперь ϱ — одномерное представление $H = B(\mathbb{F}_q)$.

Упражнение 3. Докажите, что $\varrho\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(b)$ для некоторых характеров χ_1, χ_2 группы $\mathbb{F}_q^*$.

Пусть $\chi_1 \neq \chi_2$. Докажем, что в этом случае алгебра Гекке одномерна (и, следовательно, состоит только из единицы). Действительно, пусть $F \in \mathcal{H}(G,H,\varrho)$ — комплекснозначная (в силу одномерности представления) функция на группе. Тогда заметим, что $s\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot s$. Значит, для всех $a \in \mathbb{F}_q$

$$\chi_1(a)F(s) = F\left(s\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot s\right) = \chi_2(a)F(s).$$

Отсюда следует, что $F(s) = 0$ и F определяется значением на единице группы.

Пусть теперь $\chi_1 = \chi_2$. Тогда $\varrho(A) = \chi(\det A)$, где $A \in B(\mathbb{F}_q)$, $\chi = \chi_1 = \chi_2$. Построим аналогичный базис в алгебре Гекке $\mathcal{H}(G,H,\varrho)$. Пусть

$$F_e(g) = \begin{cases} \chi(\det g) & g\in H \\ 0 & g\notin H \end{cases} \qquad F_s(g) = \begin{cases} 0 & g\in H \\ \chi(\det g) & g\notin H \end{cases}.$$

Упражнение 4. Докажите, что $T_e = F_e/|H|$ — единица алгебры Гекке, а $T_s = \chi(-1)\cdot F_s/|H|$ удовлетворяет (1).

Рассмотрим и более общий случай, $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ с подгруппой верхнетреугольных матриц.

Умножение слева и справа на верхнетреугольные матрицы производит элементарные преобразования строк и столбцов определенного вида. А именно, строки и столбцы можно умножать на константу, к любой строке можно прибавить строку с большим номером, а к любому столбцу — столбец с меньшим номером.

Пусть $\sigma \in S_n$ — перестановка. Рассмотрим матрицу $s_\sigma = (s_\sigma)_{ij}$, в которой $(s_\sigma)_{ij} = 1$ если $\sigma(i) = j$ и ноль иначе. Матрицы s_σ составляют подгруппу $GL_n(\mathbb{F}_q)$ изоморфную S_n.

Упражнение 5. Докажите, что всякая матрица из $GL_m(\mathbb{F}_q)$ приводится указанными преобразованиями к виду s_σ для некоторой σ. Докажите, что s_σ и $s_{\sigma'}$ не совмещаются указанными преобразованиями при $\sigma \neq \sigma'$.

Таким образом, имеется $n!$ двойных смежных классов. Базис в алгебре Гекке $\mathcal{H}(G, H, \mathbb{C})$, связанной с тривиальным представлением, составляют функции

$$F_\sigma = \begin{cases} 1 & g \in Hs_\sigma H \\ 0 & g \notin Hs_\sigma H \end{cases}, \qquad \sigma \in S_n.$$

Пусть $\sigma_i = (i\; i{+}1)$ — образующие S_n. Двойной смежный класс элемента σ_i устроен наиболее просто — он состоит из матриц a_{ij}, у которых все элементы ниже диагонали равны нулю кроме $a_{i+1,i}$. Пусть $T_e = F_e/|H|$, $T_i = F_{\sigma_i}/|H|$.

Задача 1. Докажите, что T_e — единица алгебры Гекке, а T_i удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(2) \qquad (T_i + T_e)(T_i - q \cdot T_e) = 0, \qquad T_iT_j = T_jT_i \text{ при } |i-j| > 1, \qquad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}.$$

Можно доказать (но это выходит за рамки данного курса), что T_i порождают алгебру $\mathcal{H}(G, H, \mathbb{C})$. Таким образом, алгебра $\mathcal{H}(G, H, \mathbb{C})$ является деформацией алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ — если формально положить $q = 1$ в (2), то эти алгебры совпадут.

Задача 2. Чему равны размерности алгебр Гекке, связанных с одномерными представлениями подгруппы верхнетреугольных матриц?

2. Алгебры Гекке $S_n \supset S_{n-1}$

Завершим доказательство основной теоремы лекции 5. Эта теорема утверждает, что для всякой диаграммы Γ из n клеток ограничение представления ϱ_Γ на S_{n-1} изоморфно прямой сумме представлений $\varrho_{\Gamma'}$ по всем поддиаграммам Γ' из $n-1$ клетки:

$$\operatorname{Res}_{S_n}^{S_{n-1}} \varrho_\Gamma = \bigoplus_{\substack{\Gamma' \subset \Gamma \\ |\Gamma'| = n-1}} \varrho_{\Gamma'}.$$

По теореме Фробениуса (предложению 2 из предыдущей лекции) это равносильно тому, что для всех диаграмм Γ' из $n-1$ клетки

$$\operatorname{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \varrho_{\Gamma'} = \bigoplus_{\substack{\Gamma \supset \Gamma' \\ |\Gamma| = n}} \varrho_\Gamma.$$

Мы знаем (см. лекцию 5), что $\operatorname{Res}_{S_n}^{S_{n-1}} \varrho_\Gamma$ содержит все необходимые представления, а из этого по теореме Фробениуса следует, что и $\operatorname{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} \varrho_{\Gamma'}$ содержит все необходимые представления. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что размерность алгебры Гекке $\mathcal{H}(S_n, S_{n-1}, \varrho_{\Gamma'})$ не превышает количество диаграмм из n клеток $\Gamma \supset \Gamma'$.

Воспользуемся индукцией. Базой служит случай $n = 2$. Пусть утверждение теоремы верно для $S_{n-1} \supset S_{n-2}$. Оценим размерность алгебры Гекке. Пусть $F \in \mathcal{H}(S_n, S_{n-1}, \varrho_{\Gamma'})$ — функция на группе со значениями в эндоморфизмах пространства R_Γ представления ϱ_Γ. Двойных смежных классов $S_{n-1} \setminus S_n / S_{n-1}$ — два, их представляют тождественная перестановка e и транспозиция $s = (n-1\; n)$. Функция F определяется своими значениями на этих двух элементах.

Так как для всех $g \in S_{n-1}$ имеет место $\varrho(g)F(e) = F(ge) = F(eg) = F(e)\varrho(g)$, оператор $F(e) : R_\Gamma \to R_\Gamma$ — сплетающий и, в силу неприводимости ϱ_Γ, $F(e)$ — скаляр.

Так как элемент s коммутирует с перестановками первых $n-2$ элементов, аналогичное рассуждение доказывает, что $F(s)$ коммутирует с действием подгруппы $S_{n-2} \subset S_{n-1}$. Но по предположению индукции мы знаем, что ограничение $\varrho_{\Gamma'}$ на S_{n-2} изоморфно прямой сумме представлений $\varrho_{\Gamma''}$ по всем диаграммам из $n-2$ клеток $\Gamma'' \subset \Gamma'$. На каждом неприводимом представлении S_{n-2} эндоморфизм $F(s)$ действует скаляром, поэтому размерность алгебры Гекке не превышает количество таких диаграмм Γ'' плюс один. А следующее наблюдение завершает доказательство.

Упражнение 6. Докажите, что для диаграммы Γ' из $n-1$ клетки

$$\sharp\{\Gamma |\ \Gamma \supset \Gamma',\ |\Gamma| = n\} = \sharp\{\Gamma'' |\ \Gamma'' \subset \Gamma',\ |\Gamma| = n-2\} + 1.$$