ЛЕКЦИЯ 9

Эта лекция посвящена комплексным представлениям конечной группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$. Для начала выясним, как устроены представления подгруппы верхнетреугольных матриц $B(\mathbb{F}_q)$.

Упражнение 1. Докажите, что группа $B(\mathbb{F}_q)$ является прямым произведением подгруппы B_1, состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и подгруппы Z скалярных матриц. Выведите отсюда, что всякое неприводимое представление B является произведением характера (одномерного представления) Z и неприводимого представления B_1. Докажите, что такие произведения — попарно неизоморфные неприводимые представления.

Группа Z изоморфна $\mathbb{F}_q^*$, у нее имеется $q-1$ одномерное представление. Посмотрим внимательнее на группу B_1.

Упражнение 2. Докажите, что в B_1 есть ровно q классов сопряженности.

Таким образом, у B_1 есть q представлений, $q-1$ из которых мы знаем — это одномерные представления. Вычислим размерность оставшегося представления по формуле Бернсайда.

$$(\dim V)^2 = |B_1| - (q-1)\cdot 1^2 = q(q-1) - (q-1) = (q-1)^2.$$

Суммируя сказанное выше, получим

Предложение 1. *У группы $B(\mathbb{F}_q)$ есть $(q-1)^2$ одномерных представлений и $q-1$ неприводимых $(q-1)$-мерных представлений.*

Одномерные представления мы уже знаем, они определяются парой характеров $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{F}_q^* \to \mathbb{C}$ следующим образом: $\varrho_{\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(c)$.

Перейдем к представлениям $GL_2(\mathbb{F}_q)$.

Определение 1. Неприводимое представление группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$ называется *регулярным*, если при ограничении на $B(\mathbb{F}_q)$ оно содержит одномерные представления.

По теореме Фробениуса все регулярные представления содержатся в индуцированных представлениях $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \varrho_{\chi_1,\chi_2}$.

Мы уже знаем из предыдущей лекции как устроена алгебра эндоморфизмов индуцированных представлений. Но нам потребуются размерности всех пространств сплетающих операторов между индуцированными представлениями.

Предложение 2.

$$\dim \mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbb{F}_q)}\left(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi_1,\chi_2},\ \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi_1',\chi_2'}\right) = \begin{cases} 2 & \chi_1=\chi_2=\chi_1'=\chi_2' \\ 1 & \chi_1=\chi_1',\ \chi_2=\chi_2',\ \chi_1\neq\chi_2 \\ 1 & \chi_1=\chi_2',\ \chi_2=\chi_1',\ \chi_1\neq\chi_2 \\ 0 & \textit{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. Введем обозначения $G = GL_2(\mathbb{F}_q)$, $B = B(\mathbb{F}_q)$. Как уже обсуждалось, пространство $\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_B^G\varrho_{\chi_1,\chi_2}, \mathrm{Ind}_B^G\varrho_{\chi_1',\chi_2'})$ — пространство комплекснозначных (в силу одномерности представления) функций F на G, таких что

$$F(bg) = \varrho(b)F(g), \qquad F(gb) = \varrho'(b)F(g) \qquad \text{для всех } b\in B. \tag{1}$$

Ясно, что такие функции определяются значениями на представителях двойных смежных классов $B\setminus G/B$ — на единичной матрице e и матрице $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Из (1) следует, что $F(b) = \varrho(b)F(e) = \varrho'(b)F(e)$ для всех $b \in B$, поэтому либо $F(e) = 0$ либо $\varrho_{\chi_1,\chi_2} = \varrho_{\chi_1',\chi_2'}$, то есть $\chi_1 = \chi_1'$, $\chi_2 = \chi_2'$. Во втором случае в качестве функции F можно взять функцию

$$F(g) = \begin{cases} \varrho(g) & g\in B \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}.$$

Кроме того, поскольку $s\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\cdot s$, из (1) следует, что

$$\varrho_{\chi_1,\chi_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)F(s) = \varrho_{\chi_1',\chi_2'}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)F(s).$$

Значит, или $F(s) = 0$ или одновременно $\chi_1 = \chi_2'$ и $\chi_2 = \chi_1'$.

Упражнение 3. Какую функцию можно взять в качестве F во втором случае?

■

Размерность пространства эндоморфизмов показывает, что представление $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi_1,\chi_2}$ неприводимо при $\chi_1 \neq \chi_2$ и состоит из двух неизоморфных неприводимых представлений при $\chi_1 = \chi_2$. Во втором случае легко найти одномерное подпредставление.

Упражнение 4. Одномерное представление ϱ, такое что $\varrho(g) = \chi(\det(g))$, где χ — характер $\mathbb{F}_q^*$, содержится в $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi,\chi}$.

Кроме того, наличие нетривиальных сплетающих операторов показывает, что неприводимые представления $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi_1,\chi_2}$ и $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi_2,\chi_1}$ изоморфны. Зная, что размерности индуцированных представлений равны количеству левых смежных классов (в данном случае $q+1$), подведем итог.

Теорема 1. *Среди регулярных представлений группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$ имеется $q-1$ одномерных, $q-1$ q–мерных и $\frac{(q-1)(q-2)}{2}$ $(q+1)$–мерных представлений.*

Таким образом, количество регулярных представлений равно количеству классов сопряженности матриц, собственные значения которых принадлежат $\mathbb{F}_q$.

Упражнение 5. Чему изоморфно ограничение регулярного представления на подгруппу $B(\mathbb{F}_q)$?

Задача 1. Разложите пространство представления $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)}\varrho_{\chi,\chi}$ в прямую сумму пространств неприводимых представлений.

Для решения этой задачи необходимо фиксировать базис в индуцированном представлении. Для этого достаточно выбрать представителей левых смежных классов.

Упражнение 6. Докажите, что следующие матрицы представляют левые смежные классы группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$ по подгруппе $B(\mathbb{F}_q)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{F}_q.$$

Рассмотрим оставшиеся неприводимые представления.

Определение 2. Неприводимое представление группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$ называется *каспидальным*, если при ограничении на $B(\mathbb{F}_q)$ оно не содержит одномерных представлений.

Количество регулярных представлений равно количеству классов сопряженности матриц, собственные значения которых не принадлежат $\mathbb{F}_q$. То есть, их всего $\frac{(q^2-q)}{2}$.

Предложение 3. *Размерность каспидальных представлений равна $q-1$.*

Доказательство. Так как размерность неприводимого представления B либо 1 либо $q-1$, размерность любого представления B, не содержащего одномерных подпредставлений, не менее $q-1$. Значит, размерности каспидальных представлений не меньше $q-1$.

Согласно формуле Бернсайда сумма квадратов размерностей каспидальных представлений равна $|GL_2(\mathbb{F}_q)|$ минус сумма квадратов размерностей регулярных представлений. Прямое вычисление показывает, что эта величина равна $\frac{(q^2-q)}{2}(q-1)^2$. Значит, размерности каспидальных представлений не могут превышать $q-1$.

■