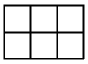
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ НМУ — ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ, 1 СЕМЕСТР

ЭКЗАМЕН

29.11.2000 — 6.11.2000

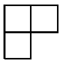
1. Пусть G — конечная группа, $Z \subset G$ — ее центр.
а) Докажите, что элементы Z действуют на неприводимых представлениях G скалярами.
б) Всегда ли найдется неприводимое представление, на котором данный элемент Z действует не тождественно?

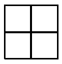
2. Рассмотрим представление ρ_Γ группы S_6, связанное с диаграммой $\Gamma = (3, 3)$:



Найдите след действия на пространстве представления ρ_Γ перестановок а) (12); б) (123); в) $(12)(34)$.

3. Чему равна размерность представления V_Γ группы $GL_m(\mathbb{C})$, связанного двойственностью Шура–Вейля
а) с диаграммой $\Gamma = (2, 1)$; б) с диаграммой $\Gamma = (2, 2)$





4. Пусть D_n — подгруппа самосовмещений правильного n–угольника, $H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ — подгруппа, состоящая из одного отражения и тождественного преобразования. Найдите алгебры Гекке $\mathcal{H}(D_n, H, \rho)$, связанные с неприводимыми представлениями H (укажите базисные элементы и вычислите их произведения).

5. Найдите следы действия элементов $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ группы $GL_2(\mathbb{F}_q)$
а) на регулярных (см. лекцию 9) комплексных представлениях $GL_2(\mathbb{F}_q)$;
б) на каспидальных (см. лекцию 9) комплексных представлениях $GL_2(\mathbb{F}_q)$.