СЕМИНАР 1

1. Задачи

1. У всякой ли группы есть точное неприводимое представление?
2. Докажите, что $SU_2/\{\pm Id\} \cong SO_3$.
3. Приведите пример, когда утверждение теоремы Машке нарушается для конечной группы при $|G|$ делящимся на характеристику поля.
4. Опишите неприводимые представления группы диэдра D_n.
5. Докажите, что матричные элементы неприводимых представлений образуют базис в пространстве всех функций на конечной группе.
6. Опишите явно представления группы S_4.
7. Докажите, что идеалы $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{a}_T\mathbf{b}_T$ и $\mathbb{C}[S_n]\mathbf{b}_T\mathbf{a}_T$ соответствуют изоморфным представлениям.
8. Пусть Γ — диаграмма Юнга, Γ^* — "сопряженная" диаграмма, строки которой соответствуют столбцам Γ и наоборот (Γ и Γ' отличаются отражением относительно диагонали). Докажите, что представления, соответствующие этим диаграммам отличаются тензорным умножением на знаковое представление.
9. Докажите, что если представление ϱ_Γ группы S_n при ограничении на S_{n-1} содержит подпредставление $\varrho_{\Gamma'}$, то Γ' — поддиаграмма Γ.
10. Вычислите алгебру Гекке $\mathcal{H}(S_n, S_{n-1}, \varrho_\Gamma)$.
11. Докажите "формулу крюков" для размерности неприводимых представлений S_n индукцией по n.

2. Основные упражнения

1. Докажите, что P — проектор на некоторое подпространство тогда и только тогда, когда $P^2 = P$. В частности, произведение коммутирующих проекторов — проектор (на что?).
2. Докажите, что ядро и образ сплетающих операторов — подпредставления.
3. Определите факторпредставление, то есть действие группы на факторпространстве по подпредставлению.
4. Докажите, что всякая конечная подгруппа $GL_1(\mathbb{C})$ — циклическая.
5. Пусть представления $V_1, \ldots, V_k$ — неприводимы, пусть
$$U = n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \cdots \oplus n_kV_k, \qquad V = m_1V_1 \oplus m_2V_2 \oplus \cdots \oplus m_kV_k.$$
Тогда в предположениях леммы Шура $\dim \mathrm{Hom}_G(U, V) = \sum m_i n_i$.
6. Пусть A — конечная абелева группа. Тогда группа характеров (одномерных представлений) A изоморфна A.
7. Докажите, что группа характеров произвольной группы G изоморфна $(G/[G, G])^*$.
8. Докажите, что $\chi_{\varrho_1\oplus\varrho_2} = \chi_{\varrho_1} + \chi_{\varrho_2}$, а $\chi_{\varrho_1\otimes\varrho_2} = \chi_{\varrho_1}\chi_{\varrho_2}$.
9. Докажите, что представление ϱ — неприводимо тогда и только тогда, когда $\langle \chi_\varrho, \chi_\varrho \rangle = 1$.
10. Докажите, что представления ϱ_1 и ϱ_2 — изоморфны тогда и только тогда, когда $\chi_{\varrho_1} = \chi_{\varrho_2}$.
11. Докажите теорему 2 из лекции 3 для S_3 вычислением.
12. Докажите, что всякий сплетающий оператор в регулярном представлении $R \cong \mathbb{C}[G]$ имеет вид $x \to xa$, $a \in \mathbb{C}[G]$.
13. Докажите, что всякий левый идеал в $\mathbb{C}[G]$ — имеет вид $\mathbb{C}[G]c$ для некоторого $c \in \mathbb{C}[G]$, такого что $c^2 = c$. Какому сплетающему оператору соответствует c?
14. Докажите, что идеалы $\mathbb{C}[G]c_1$ и $\mathbb{C}[G]c_2$, $c_1^2 = c_1$, $c_2^2 = c_2$, соответствуют изоморфным представлениям тогда и только тогда, когда c_1 и c_2 — сопряжены в $\mathbb{C}[G]$.
15. Докажите, что если $\sigma \in S_n$ представляется в виде ab, $a \in \mathcal{A}_T$, $b \in \mathcal{B}_T$, то такое представление единственно.
16. Докажите, что след действия элемента $\sum\limits_{g\in G} \lambda_g[g]$ на $\mathbb{C}[G]$ равен λ_e, где e — единица группы.