СЕМИНАР 2

1. Задачи

1. Изоморфны ли следующие представления $GL_m(\mathbb{C})$ представлениям V_Γ:
   одномерные $\det : GL_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$, $(\det)^k : GL_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ $(k \in \mathbb{Z})$,
   m–мерные : $V \otimes (\det)^k$, V^*, $V^* \otimes (\det)^k$?
2. $GL_m(\mathbb{C})$ действует на пространстве Mat_m сопряжением. Разложите это представление в прямую сумму V_Γ.
3. Опишите представления подгруппы $B_1 \subset B(\mathbb{F}_q) \subset GL_2(\mathbb{F}_q)$, состоящей из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Пусть $G = D_n$ — группа самосовмещений правильного n–угольника, $H = \mathbb{Z}_n$ — подгруппа собственных преобразований. Найдите $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ для всех одномерных представлений χ группы $\mathbb{Z}_n$.
5. Докажите, что в обозначениях лекции 8 элемент T_e — единица алгебры Гекке $\mathcal{H}(GL_m(\mathbb{F}_q), B(\mathbb{F}_q), \mathbb{C})$, а T_i удовлетворяют следующим соотношениям:
$$(T_i + T_e)(T_i - q \cdot T_e) = 0, \qquad T_iT_j = T_jT_i \text{ при } |i-j| > 1, \qquad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}.$$
6. Чему равны размерности алгебр Гекке $\mathcal{H}(GL_m(\mathbb{F}_q), B(\mathbb{F}_q), \varrho)$, связанных с одномерными представлениями ϱ подгруппы верхнетреугольных матриц?
7. Разложите пространство представления $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \varrho_{\chi,\chi}$ в прямую сумму пространств неприводимых представлений.

2. Основные упражнения

1. Пусть G_1, G_2 — группы, одна из которых конечна. Докажите, что всякое неприводимое представление $G_1 \times G_2$ — произведение $U \otimes V$ неприводимого представления U группы G_1 и неприводимого представления V группы G_2.
2. Докажите, что всякий симметричный тензор — линейная комбинация диагональных.
3. Докажите, что операторы в пространстве $\bigoplus_i U_i \otimes V_i$, коммутирующие с операторами из $\bigoplus_i \mathrm{End}(V_i)$ принадлежат $\bigoplus_i \mathrm{End}(U_i)$.
4. Докажите, что в V_Γ имеется базис из общих собственных векторов диагональных матриц.
5. Пусть $v \in V_\Gamma$ — вектор старшего веса. Докажите, что всякая верхнетреугольная матрица действует на вектор v умножением на скаляр.
6. Докажите, что если H — нормальная подгруппа G, а представление тривиально, то $\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[G/H]$.
7. Выведите формулу Бернсайда из теоремы Фробениуса.
8. Докажите, что композиция сплетающего оператора из $\mathrm{Ind}_{H_1}^G(\varrho_1)$ в $\mathrm{Ind}_{H_2}^G(\varrho_2)$ со сплетающим оператором из $\mathrm{Ind}_{H_2}^G(\varrho_2)$ в $\mathrm{Ind}_{H_3}^G(\varrho_3)$ задается сверткой соответствующих функций на группе.
9. Докажите, что для диаграммы Γ' из $n-1$ клетки $\sharp\{\Gamma|\ \Gamma \supset \Gamma',\ |\Gamma| = n\} = \sharp\{\Gamma''|\ \Gamma'' \subset \Gamma',\ |\Gamma| = n-2\} + 1$.
10. Пусть $\theta : \mathbb{F}_{q^2} \to \mathbb{F}_{q^2}$ — отображение, переводящее x в x^q (частный случай автоморфизма Фробениуса). Докажите, что θ — автоморфизм. Докажите, что θ^2 — тождественное отображение. Докажите, что $\theta(x) = x$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathbb{F}_q$. Докажите, что если x — корень многочлена с коэффициентами в $\mathbb{F}_q$, то и $\theta(x)$ — корень этого многочлена.
11. Докажите, что двойных смежных классов $B(\mathbb{F}_q) \setminus GL_2(\mathbb{F}_q) / B(\mathbb{F}_q)$ — два: $B(\mathbb{F}_q)$ и дополнение к $B(\mathbb{F}_q)$.
12. Докажите, что следующие матрицы представляют левые смежные классы $GL_2(\mathbb{F}_q)$ по подгруппе $B(\mathbb{F}_q)$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{F}_q.$$
13. Пусть ϱ — одномерное представление $B(\mathbb{F}_q)$. Докажите, что $\varrho\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \chi_1(a)\chi_2(b)$ для некоторых характеров χ_1, χ_2 группы $\mathbb{F}_q^*$.
14. Докажите, что группа $B(\mathbb{F}_q)$ является прямым призведением подгруппы B_1 (см. задачу 3) и подгруппы Z скалярных матриц. Выведите отсюда, что всякое неприводимое представление B является произведением характера (одномерного представления) Z и неприводимого представления B_1. Докажите, что такие произведения — попарно неизоморфные неприводимые представления.
15. Постройте нетривиальный элемент $\mathrm{Hom}_{GL_2(\mathbb{F}_q)}\left(\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \varrho_{\chi_1,\chi_2}, \mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \varrho_{\chi_2,\chi_1}\right)$.
16. Докажите, что одномерное представление ϱ, такое что $\varrho(g) = \chi(\det(g))$, где χ — характер $\mathbb{F}_q^*$ содержится в $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{F}_q)}^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \varrho_{\chi,\chi}$.
17. Чему изоморфно ограничение регулярных представлений на подгруппу $B(\mathbb{F}_q)$?