ЭКЗАМЕН

21.02.2001 — 28.02.2001

1. (Конечная группа Гейзенберга) Пусть $\mathfrak{H}_n$ — группа с образующими x, y, ε и соотношениями

$$x^n = y^n = \varepsilon^n = e, \qquad [x, y] = \varepsilon, \qquad [x, \varepsilon] = [y, \varepsilon] = e,$$

где квадратные скобки обозначают групповой коммутатор ($[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$).
а) Найдите количество элементов и количество классов сопряженности $\mathfrak{H}_n$.
б) Найдите все одномерные представления $\mathfrak{H}_n$.
в) Найдите все неприводимые представления $\mathfrak{H}_n$.

2. Пусть V — представление группы S_4 самосовмещениями куба. Разложите на неприводимые представления
а) $V \otimes V$; б) $S^2(V)$; в) $V \otimes V \otimes V$; г) $S^3(V)$.

3. Найдите спектр (набор собственных значений с учетом кратности) действия диагональной матрицы $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in GL_n(\mathbb{C})$ с диагональными элементами $a_1, \ldots, a_n$ на представлении группы $GL_n(\mathbb{C})$, связанном двойственностью Шура–Вейля с диаграммой Γ, где а) $\Gamma = (n)$; б) $\Gamma = (1, \ldots, 1)$; в) $\Gamma = (2, 1)$.

4. Вычислите (укажите базис и умножение в нем) алгебру Гекке
а) $\mathcal{H}(A_n, A_{n-1}, \mathbb{C})$, $n > 3$; б) $\mathcal{H}(S_n, A_{n-1}, \mathbb{C})$, $n > 3$;
где $A_n \subset S_n$ — подгруппа четных перестановок.

5. Пусть $D \subset GL_2(\mathbb{F}_q)$ — подгруппа диагональных матриц. Найдите (разложите на неприводимые представления) $\mathrm{Ind}_D^{GL_2(\mathbb{F}_q)} \chi$ для всех одномерных представлений χ группы D.

6. Докажите, что алгебры Гекке $\mathcal{H}(G, H, \rho)$ — полупросты
а) над полем комплексных чисел; б) над произвольным полем.