Задачи по курсу "Алгебраическая геометрия над $\mathbb{C}$" (М. Вербицкий, Д. Каледин).

Осенний семестр 2001.

Задачи к первой главе книги Демайи

Для сдачи экзамена надо решить все задачи к первой главе, не отмеченные звездочкой, либо все задачи к первой главе, отмеченные звездочкой. Решение остальных задач приветствуется в обоих случаях. Надо также решить задачи ко второй главе: либо все, не отмеченные звездочкой, либо все, отмеченные звездочкой, кроме двух, по выбору. Решение остальных задач – – –

1. Задачи на оператор Лапласа

1.1 Уравнение теплопроводности. Пусть M компактное риманово многообразие, $f: M \to \mathbb{R}$ функция из класса C^2,

$$\Delta = d^* d = \sum \frac{d^2}{dx_i dx_j} g^{ij}$$

оператор Лапласа, определяемый метрическим тензором g^{ij}. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = -\Delta f_t,$$

где $f_t: M \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ функция на M, зависящая от параметра t.

а). Пусть $f_0 = f$. Доказать, что f_t равномерно сходится к гладкому пределу, когда $t \to \infty$. Написать предельную функцию явно.

б)*. Пусть M не компактно, зато f функция с компактным носителем. Всегда ли существует предел $\lim_{t\to\infty} f_t$ (в топологии равномерной сходимости на компактах)?

1.2 Рассмотрим действие оператора Лапласа

$$\Delta := C^\infty S^r \to C^\infty S^r$$

на единичной сфере S^r. Найти все собственные функции Δ в классе полиномиальных функций. Доказать, что все собственные функции Δ полиномиальны. Доказать, что обратный оператор Δ^-1 определен и компактен на гильбертовом пространстве L^2-интегрируемых функций на S^r.

2. Задачи на субгармоничность.

Пусть f непрерывная функция на шаре B в $\mathbb{R}^n$. Для шара $B_r(a) \subset B$ радиуса r с центром в a, обозначим среднее f на $B_r(a)$ за $V_{r,a}(f)$. Обозначим среднее f на границе шара $B_r(a)$ за $S_{r,a}(f)$.

2.1. Предположим, что f дважды дифференцируемая в нуле

а). Пусть $S_{r,0}(f) \geq f(0)$. Доказать, что $\Delta f(0) \geq 0$.

б). Пусть $V_{r,0}(f) \geq f(0)$. Доказать, что $\Delta f(0) \geq 0$.

Указание. Усредним f по действию группу $SO(n)$ на шаре. Получим дважды дифференцируемую в нуле функцию, симметричную по $SO(n)$, т.е. зависящую только от расстояния до нуля. Так как операции Δ, $S_{r,0}$, $V_{r,0}$ сферически симметричны, условия задачи будут верны, а значение $\Delta f(0)$ не изменится. Значит, достаточно доказать задачу для сферически симметричной функции. Раскладываем f в ряд Тэйлора с остаточным членом, проверяем.

2.2. Доказать, что $\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}S_{r,0}(f) = \Delta f(0)$.

Указание: пользуйтесь симметризацией.

2.3. Пусть f - непрерывная, дважды дифференцируемая субгармоническая функция. Доказать, что для любой области $U \subset B$ с гладкой границей ∂U, имеем

$$Av_U f \leq Av_{\partial U} f,$$

где $Av_X f$ это усреднение f по X:

$$Av_X f := \frac{\int_X f \operatorname{Vol} X}{\int_X \operatorname{Vol} X}.$$

Придать физический смысл этому утверждению с точки зрения уравнения теплопроводности.

2.4. Доказать, что следующие утверждения равносильны:

(i) $S_{r,a} f \geq f(a)$ для всех r, a

(ii) $V_{r,a} f \geq f(a)$ для всех r, a

Указание: Воспользоваться задачей (3) для получения оценки $S_{r,a} \geq V_{r,a}$. Выразить $V_{r,a}$ через $S_{r,a}$ для получения импликации (i) $\Rightarrow$ (ii).

3. Задача на лемму Дольбо-Гротендика

3.1. Пусть θ - гладкая замкнутая дифференциальная форма на шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, типа (p,q) $(p>0, q>0)$. Докажите, что $\theta = \partial\overline{\partial}\varphi$, для какой-то формы $\varphi \in \Lambda^{p-1,q-1}(M)$.

4. Задачи на голоморфную выпуклость и многообразия Штейна.

4.1. Пусть X - тотальное пространство векторного расслоения B на кривой $\mathbb{C}P^1$. Будет ли X голоморфно выпукло, если

а). B - кокасательное расслоение

б). B - это тавтологическое расслоение $\mathcal{O}(-1)$

в)*. B - это $\mathcal{O}(i)$, i любое

г). Тот же вопрос, если X - тотальное пространство расслоения B с выкинутым нулевым сечением.

4.2. Пусть X - открытый диск единичного радиуса в $\mathbb{C}$. Можно ли вложить X в $\mathbb{C}^n$ в качестве замкнутого подмногообразия?

4.3.* Пусть X - тотальное пространство касательного расслоения на кривой C, рода ≥ 2. Доказать, что X голоморфно выпукло, либо что X псевдовыпукло.

Примечание: эти утверждения не эквивалентны, в задаче требуется доказать любое из них.

4.4. Пусть X гладко, $X' \to X$ собственное, конечное, разветвленное накрытие. Доказать, что X' голоморфно выпукло тогда и только тогда, когда X голоморфно выпукло.

4.5. а). Пусть X комплексное многообразие, на котором задана собственная голоморфная функция $f: X \to \mathbb{C}$ (собственная - значит, что все множества уровня компактны, или, что то же самое, прообраз компакта всегда компакт). Доказать, что X голоморфно выпукло.

б) Привести пример, когда на голоморфно выпуклом многообразии нет такой функции.

4.6 Пусть X голоморфно выпуклое комплексное многообразие без компактных аналитических подмножеств. Доказать, что X Штейново.

4.7* $U \subset \mathbb{C}^n$ Штейново, с гладкой границей ∂U. Доказать, что ∂U контактное (определение контактности см. Арнольд, Математические Методы Классической Механики).

4.7* X компактное, гладкое, алгебраическое, пучок $\Omega^1 X$ порожден глобальными сечениями. Доказать, что универсальное накрытие $\widetilde{X}$ Штейново.

Примечание: говорят, что расслоение B на комплексном многообразии X *порождено глобальными сечениями*, если каноническое отображение $\Gamma(X, B) \otimes \mathcal{O}_X \to B$ сюръективно – или, иными словами, если для каждой точки $x \in X$ и каждого вектора $b \in B_x$ в слое B_x расслоения B над x существует глобальное сечение $\widetilde{b} \in \Gamma(X, B)$ расслоения B, которое принимает в точке x значение b.

4.8* (Людмил Кацарков) X компактное, гладкое, алгебраическое, $\pi_1(X)$ абелево. Доказать, что универсальное накрытие $\widetilde{X}$ голоморфно выпукло.

5. Задачи на плюрисубгармоничность.

5.1* (Нессим Сибони) Пусть f плюрисубгармоническая функция на $B \backslash 0$, где B шар в C^n, $n \geq 2$. Доказать, что 2-форма $\partial\overline{\partial} f$ локально L^2-интегрируема на B.

Задачи ко второй главе книги Демайи

Для сдачи экзамена надо решить все задачи, не отмеченные звездочкой, либо все задачи, отмеченные звездочкой, кроме двух (по выбору). Решение остальных задач приветствуется в обоих случаях.

1. Задачи на теорию пучков.

1.1 Пусть $\check{\mathcal{O}}_X$ – тотальное пространство пучка $\mathcal{O}_X$ на комплексном пространстве X. Доказать, что $\check{\mathcal{O}}_X$ хаусдорфово.

Указание: см. задачу 11.1 к главе 2 книги Демайи.

1.2 Пусть A – пучок колец, F, G – пучки A-модулей. Определим предпучок $\mathrm{Hom}_A(F,G)$ таким образом, что

$$\mathrm{Hom}_A(F,G)\big|_U = Hom_{A\big|_U}(F\big|_U, G\big|_U),$$

(с правой стороны равенства стоит пространство гомоморфизмов пучков $A\big|_U$-модулей). Доказать, что $\mathrm{Hom}_A(F,G)$ – пучок. Построить естественный гомоморфизм ростков

$$\mathrm{Hom}_A(F,G)_x \stackrel{\varphi_x}{\to} \mathrm{Hom}_{A_x}(F_x, G_x)$$

(справа стоит пространство гомоморфизмов A_x-модулей; A_x, F_x, G_x - это пространства ростков соответствующих пучков в точке x).

1.3 В условиях задачи 1.2, доказать следующее: если F конечно порожден, то φ_x инъективен. Если F конечно порожден и конечно представим, то φ_x – изоморфизм.

1.4 Пусть A когерентен, F и G тоже. Доказать, что $\mathrm{Hom}_A(F,G)$ когерентен.

1.5* Доказать, что пучок полиномов на $\mathbb{C}^n$ когерентен как пучок колец (в аналитической топологии; когерентность в топологии Зариского была доказана на лекциях). Доказать, что пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ не когерентен.

1.6* Пусть X – компактное топологическое пространство, а R_X – пучок непрерывных, локально постоянных функций на X. Пара (X, R_X) это окольцованное пространство.

Докажите "теорему Гильберта о нулях" – нильрадикал $\sqrt{J}$ любого идеала $J \subset R_X$ равен идеалу всех функций, зануляющихся на общих нулях $f \in J$.

1.7* Какие множества могут быть общими нулями идеалов из R_X?

1.8* X называется квазикомпактным, если из любого бесконечного покрытия открытого множества открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Доказать, что если X квазикомпактен, то R_X нетерово. Верно ли обратное?

1.9* Доказать, что R_X когерентен, если X квазикомпактно.

2. Задачи на теорию аналитических множеств.

Для непустого подмногообразия X в $\mathbb{P}^n$, обозначим за $CX_0 \subset \mathbb{C}^{n+1}$ множество всех ненулевых векторов, которые проектируются в X при стандартной проекции $\mathbb{C}^{n+1}\backslash 0 \to \mathbb{P}^n$. Пусть CX это объединение CX_0 и $\{0\}$.

2.0 Воспользуйтесь теоремой Реммерта-Штейна и докажите, что CX – аналитическое подмножество в $\mathbb{C}^{n+1}$.

2.1 Пусть $X \subset \mathbb{C}P^n$ неприводимое алгебраическое подмногообразие, $CX \subset \mathbb{C}^{n+1}$ его конус. Докажите, что CX неприводим тогда и только тогда, когда X неприводим.

2.2 Пусть P – неприводимый полином в $\mathbb{C}[z_1, ... z_n]$. Доказать, что $P^{-1}(0)$ неприводимо как аналитическое множество. Постройте регулярную систему координат. Вычислите дискриминант P. Чему равен порядок ветвления разветвленного накрытия $P^{-1}(0) \to \mathbb{C}^{n-1}$?

2.3 Пусть A – неприводимое алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^n$, размерности p. Докажите, что есть система координат

$$(\underbrace{z_1, ..., z_p}_{z'}, \underbrace{z_{p+1}, ..., z_n}_{z''})$$

такая, что стандартная проекция $\pi' : A \to \mathbb{C}^p$ (проекция A на первые p координат) – собственное и конечное отображение. Докажите, что A содержится в конусе $|z''| \leq C(|z'| + 1)$ (для какой-то константы C).

2.4* Наоборот, пусть дано подмногообразие $A \subset \mathbb{C}^n$ чистой размерности p, которое содержится в конусе $|z''| \leq C(|z'| + 1)$. Докажите, что A алгебраическое.

3. Задачи на фактор-особенности.

Пусть G конечная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ линейными автоморфизмами. Особенности $X := \mathbb{C}^n/G$ называются фактор-особенностями, или особенностями орби-образия. Если f – G-инвариантная функция на $\mathbb{C}^n$, то f можно рассмотреть как функцию на X. Пространство X окольцовано пучком $\mathcal{O}{\mathbb{C}^n}^G$ G-инвариантных голоморфных функций.

Окольцованное пространство, локально устроенное как $\mathbb{C}^n/G$, называется многообразием с фактор-особенностями (примерно это называют также орбиобразием).

3.0 Пусть G конечная группа, действующая автоморфизмами на гладком многообразии M. Докажите, что фактор M/G является многообразием с фактор-особенностями.

3.1 Докажите, что многообразие с фактор-особенностями является комплексно-аналитическим пространством.

Указание. Воспользуйтесь индукцией по размерности $n = \dim X$ фактор-особенности $X = \mathbb{C}^n/G$. Поскольку группа $\mathbb{C}^*$, действующая на $\mathbb{C}^n$ растяжениями, коммутирует с G, то она действует также и на X. Имеем $X = CY$: X это конус над его проективизацией Y. Y имеет фактор-особенности, значит, комплексно-аналитичен (по предположению индукции). Воспользовавшись теоремой Реммерта-Штейна, как при доказательстве теоремы Чжоу, выведите, что X тоже комплексно аналитичен.

3.2* Пусть R – кольцо G-инвариантных полиномов на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что R конечно порождено.

3.3 Пусть G_1 – конечная группа, действующая на $\mathbb{C}^n$ и на G автоморфизмами. Предположим, что это действие согласовано с действием G на $\mathbb{C}^n$. Постройте вложение $X \overset{q}{\hookrightarrow} \mathbb{C}^m$ такое, что G_1 действует на $\mathbb{C}^m$ линейными автоморфизмами, и отображение q G_1-эквивариантно.

3.4* Обозначим через X_{sing} множество особых точек X. Постройте естественное отображение $\varphi: G \to \pi_1(X\backslash X_{sing})$ из G в фундаментальную группу $\pi_1(X\backslash X_{sing})$. Докажите, что оно наложение.

3.5* Пусть G действует свободно на $\mathbb{C}^n\backslash 0$, $n > 1$. Докажите, что X не гладкое.

Указание: воспользуйтесь задачей 3.4.

3.6* Комплексное отражение – это линейный автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n)$ конечного порядка, множество неподвижных точек которого имеет коразмерность 1. Пусть $\mathbb{C}^n/G$ – гладкое многообразие. Докажите, что группа G порождена комплексными отражениями.

Указание: воспользуйтесь задачей 3.5.

4. Задачи на когерентные пучки.

Пусть F – когерентный пучок на гладком связном многообразии M.

4.1 Для каждой точки $x \in M$, рассмотрим линейное пространство $F^x := F/\mathfrak{m}_x F$ (фактор по максимальному идеалу). Докажите, что функция $x \to \dim F^x$ полунепрерывна снизу. Обозначим за $Sing(F)$ множество, где $\dim F^x$ подскакивает. Докажите, что $Sing(F)$ комплексно аналитично. Это множество называется множеством особенностей F. Докажите, что $F\Big|_{M\backslash Sing(F)}$ – расслоение.

4.2 Пусть F когерентный пучок, $f \in F$ сечение. Докажите, что следующие утверждения равносильны:

а). Для какого-то открытого множества $U \subset M$, $f\Big|_U = 0$

б). $f\Big|_{M\backslash Sing(F)} = 0$.

Докажите, что сечения, удовлетворяющие условиям (а) и (б) образуют подпучок.

Этот подпучок называется подпучком кручения, обозначается $T(F)$.

4.3 Пусть F – когерентный пучок без кручения. Докажите, что для каждой точки $x \in M$ есть окрестность $U \ni x$ такая, что $F\Big|_U$ можно вложить в $\mathcal{O}_U^{\oplus p}$.

4.4 Обозначим $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_X)$ за F^*. Пусть $\mu: F \to F^{**}$ – естественный гомоморфизм. Докажите, что $\ker \mu = T(F)$; другими словами, ядро μ – подпучок кручения.

4.5* Докажите, что пучок без кручения неособ в коразмерности 2 (т.е. $\operatorname{codim} Sing(F) \geq 2$).

Указание. Рассмотрим вложение $F \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_U^{\oplus p}$. Пусть F_i - образ $\varphi(F)$ при проекции на $\mathcal{O}_U^{\oplus i}$ (первые i координат). Докажите, что фактор F_i/F_{i-1} вкладывается в $\mathcal{O}_U$. Это позвоняет представить F в виде последовательности расширений пучков, вложенных в $\mathcal{O}_U$. Докажите, что подпучок $\mathcal{O}_U$ неособ в коразмерности 1, воспользовавшись теоремой Гильберта о нулях.

4.6 *Определение.* Пучок F называется рефлексивным, если естественное отображение $\mu: F \to F^{**}$ изоморфизм. Пучок F называется нормальным, если для каждого открытого множества $U \subset M$, комплексно аналитического подмножества $A \subset U$, $\operatorname{codim} A \geq 2$, имеем

$$F\Big|_U = F\Big|_{U \setminus A}.$$

Докажите, что рефлексивный пучок нормален.

4.7* Докажите, что нормальный пучок без кручения рефлексивен.

4.8* Докажите, что рефлексивный пучок ранга 1 есть расслоение.

5. Задачи на комплексно аналитические схемы.

5.1* Пусть F – рефлексивный пучок над M. Рассмотрим кольцо $\oplus_i S^i F^*$, где S^i это симметрическая степень. Обозначим $Proj$ этого градуированного кольца за $\mathbb{P}F \xrightarrow{p} M$. Тотальное пространство F это конус соответствующего проективного морфизма, т.е. пополненный аналитическими функциями спектр алгебры $\oplus_i S^i F^*$. Оно обозначается $Tot(F)$ и снабжено естественной проекцией $Tot(F) \to M$.

Докажите, что $Tot(F)$ неособо в тех и только тех точках M, где неособ F. Придумайте определение групповой комплексно аналитической схемы и докажите, что $Tot(F)$ - групповая схема над M. Докажите, что $Tot(F)$ нормально и $\mathbb{C}^*$ действует на нем автоморфизмами.

5.2* Пусть V – нормальная групповая схема над M с действием $\mathbb{C}^*$. Докажите, что V – это тотальное пространство рефлексивного когерентного пучка.