Комплексные числа

1. а)Докажите, что $w/z = w\bar{z}/|z|^2$. б) Представьте число $\frac{3+2i}{1+i}$ в виде $a+bi$, где a и b — вещественные числа.

2. Докажите, что все окружности и прямые задаются уравнениями вида $Az\bar{z} + cz + \bar{c}\,\bar{z} + D = 0$, где A и D — вещественные числа, c — комплексное число.

3. Докажите, что $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ для любого натурального n (*формула Муавра*).

4. Докажите, что $\sin(2n+1)\alpha = \binom{2n+1}{1}\cos^{2n}\alpha\sin\alpha - \binom{2n+1}{3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha + \dots + (-1)^n\sin^{2n+1}\alpha$.

5. а) Докажите, что числа $\sin^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}$, ..., $\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена $\binom{2n+1}{1}(1-x)^n - \binom{2n+1}{3}(1-x)^{n-1}x + \binom{2n+1}{5}(1-x)^{n-2}x^2 - \dots + (-1)^n x^n$.

б) Докажите, что числа $\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}$, $\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}$, ..., $\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$ являются корнями многочлена $\binom{2n+1}{1}x^n - \binom{2n+1}{3}x^{n-1} + \binom{2n+1}{5}x^{n-2} - \dots + (-1)^n$.

6. Используя результат задачи 5, вычислите следующие суммы и произведения:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1} + \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1};\\
&\text{б)}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}} + \frac{1}{\sin^2\frac{2\pi}{2n+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2n+1}};\\
&\text{в)}\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Корни из единицы

Корнем n-й степени из единицы называют комплексное число ε, для которого $\varepsilon^n = 1$. *Примитивным корнем n-й степени из единицы* называют комплексное число ε, для которого $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $k = 1$, 2, ..., $n-1$.

7. а) Докажите, что $x^{2n} - 1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

б) Докажите, что $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

в) Докажите, что $\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

8. а) Докажите, что $x^{2n+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1} + 1\right)$.

б) Докажите, что $\sin\frac{\pi}{2n+1}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$.

9. Докажите, что примитивные корни n-й степени из единицы — это числа $\cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}$, где число m взаимно просто с n.

10. Пусть ε — примитивный корень n-й степени из единицы. Докажите, что

$$1 + \varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \dots + \varepsilon^{(n-1)k} = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n-1;\\ n & \text{при } k = n.\end{cases}$$

11. Пусть z_1, ..., z_n — вершины правильного n-угольника на комплексной плоскости, z_0 — его центр. Докажите, что если $P(z)$ — многочлен степени не выше $n-1$, то $P(z_1) + \dots + P(z_n) = nP(z_0)$.

12. Пусть ε — примитивный корень степени n из единицы. Докажите, что $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^3)\cdots(1-\varepsilon^{n-1}) = n$.

13. Докажите, что произведение длин всех сторон и диагоналей, проведённых из одной вершины правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1, равно n.

14. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c многочлен $x^{3a}+x^{3b+1}+x^{3c+2}$ делится на x^2+x+1.

Многочлены Чебышева

15. а) Докажите, что $\cos n\varphi$ полиномиально выражается через $\cos\varphi$, т. е. существует такой многочлен $T_n(x)$, что $T_n(x) = \cos n\varphi$ при $x = \cos\varphi$.

б) Докажите, что $T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n+z^{-n}}{2}$.

16. а) Пусть $n = 2k+1$. Докажите, что число $\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x) - T_k(x)$.

б) Пусть $n = 2k$. Докажите, что число $\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)$ для любого целого l является корнем многочлена $T_{k+1}(x) - T_{k-1}(x)$.

17. а) Вычислите многочлены $T_{k+1}(x) - T_k(x)$ при $k \leqslant 4$.

б) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos\frac{4\pi}{5}$ являются корнями многочлена $4x^2 + 2x - 1$.

в) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$ и $\cos\frac{6\pi}{7}$ являются корнями многочлена $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

г) Докажите, что числа $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$ являются корнями многочлена $8x^3 - 6x + 1$.

Некоторые уравнения, разрешимые в радикалах

18. Докажите, что уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ можно привести к виду $y^n + b_2y^{n-2} + \dots + b_n = 0$ с помощью замены $y = x + c$, где c — некоторое число.

Поэтому достаточно рассмотреть кубические уравнения вида $x^3 + ax + b = 0$ и уравнения 4-й степени вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$.

Решение кубических уравнений

19. а) Найдите корни уравнение $x^3 + px + q = 0$ по следующей схеме: представьте корни в виде $x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ и найдите выражения для α и β.

б) Полученную в а) формулу можно записать в виде $x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$, где $\alpha, \beta = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}}$. Эта формула даёт 9 значений корня. Можно ли получить формулу, которая даёт 3 значения корня?

20. Решите уравнение $x^3 + px + q = 0$, воспользовавшись тождеством

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z),$$

где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. (Подберите y и z так, что $-3yz = p$ и $y^3 + z^3 = q$.)

21. Докажите, что если все корни кубического уравнения $x^3 + ax + b = 0$ действительные, то при вычислении корней по формуле из решения задачи 19 обязательно появляются мнимые числа.

22. Найдите корень $x_0 = 2$ уравнения $x^3 - x - 6 = 0$ по формуле из решения задачи 19.

23. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3+px+q = 0$. Положим $\alpha = x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$ и $\beta = x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (эти выражения называют *резольвентами Лагранжа*).

а) Докажите, что $3x_1 = \alpha + \beta$, $3x_2 = \omega^2\alpha + \omega\beta$ и $3x_3 = \omega\alpha + \omega^2\beta$.

б) Выразите $\alpha\beta$ и $\alpha^3 + \beta^3$ через p и q.

в) Решите уравнение $x^3 + px + q = 0$.

Решение уравнений 4-й степени

24. Решите уравнение $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, представив многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ в виде разности квадратов двух многочленов. А именно, воспользуйтесь тем, что $x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 - \left(2tx^2 - bx + (t^2 + at - c + \frac{a}{2})\right)$ и выберите t так, чтобы дискриминант второго квадратного трёхчлена был равен нулю.

25. Решите уравнение $x^4+ax^2+bx+c = 0$, найдя уравнение, которому удовлетворяет сумма двух корней данного уравнения.

26. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — корни уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$. Положим $\alpha = -(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $\beta = -(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ и $\gamma = -(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

а) Выразите x_1, x_2, x_3 и x_4 через $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\gamma}$.

б) Выразите коэффициенты многочлена $(y - \alpha)(y - \beta)(y - \gamma)$ через a, b, c.

в) Сведите решение уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ к решению кубического уравнения.

Решение некоторых других уравнений

27. Решите уравнения

$$x^5 - 10x^3(1-x^2) + 5x(1-x^2)^2 = a,$$
$$x^7 - 21x^5(1-x^2) + 35x^3(1-x^2)^2 - 7x(1-x^2)^3 = a.$$

28. Решите уравнения $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - b = 0$ и $x^7 - 7ax^5 + 14a^2x^3 - 7a^3x - b = 0$.