Занятие 2. 13.09.01

Системы линейных уравнений и определитель.

Определение 1. *Матрицей размера* $m \times n$ называется таблица из m строк и n столбцов, в ячейках которой расположены числа. **Обозначение:** $A = (a_{ij})$, элемент a_{ij} лежит в строке номер i и столбце номер j.

Определение 2. Действия над матрицами.

Сложение матриц. *Суммой матриц* A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, определённая формулой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. **Обозначение:** $C = A + B$.

Умножение матрицы на число. *Произведением матрицы* A размера $m \times n$ *на число* λ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$, определённая формулой $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. **Обозначение:** $C = \lambda A$.

Произведение матриц. *Произведением матрицы* A размера $m \times n$ *на матрицу* B размера $n \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times k$, определённая формулой $c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$. **Обозначение:** $C = AB$.

Транспонирование матрицы. *Матрицей, транспонированной к матрице* A размера $m \times n$, называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $n \times m$, определённая формулой $c_{ij} = a_{ji}$. **Обозначение:** $C = A^t$.

Задача 1. Проверьте следующие свойства действий над матрицами:

1. $A(BC) = (AB)C$ (**ассоциативность**); в силу этого свойства произведение трёх матриц ABC можно писать без скобок;
2. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$; в частности, определено выражение αAB;
3. $A(B + C) = AB + AC$ (**дистрибутивность**);
4. $(B + C)A = BA + CA$ (**дистрибутивность**);
5. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
6. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

Задача 2. Чему равно $(AB)^t$?

Задача 3. Перемножьте в разных порядках матрицы A и B, где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ и:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

4. $A = (1, 1, 1, 0)$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; 5. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Приведите пример двух квадратных матриц 2×2 A и B для которых $AB \neq BA$.

Определение 3. Матрица A размера $n \times n$ называется *скалярной*, если существует такое число λ, что $A = \lambda E$, где E — единичная матрица.

Определение 4. Говорят, что матрицы A и B *коммутируют*, если как AB, так и BA определены, и $AB = BA$.

Задача 5. Докажите, что любая скалярная матрица размера $n\times n$ коммутирует с любой другой матрицей размера $n \times n$.

Задача 6. Пусть квадратная $(n\times n)$-матрица A такова, что для любой $(n\times n)$-матрицы B выполнено $AB = BA$. Докажите, что матрица A — скалярная.

Определение 5. *Системой линейных уравнений* называется запись вида $Ax = b$, где A — матрица коэффициентов размера $m \times n$, x — матрица неизвестных размера $n \times 1$, b — матрица коэффициентов размера $m \times 1$. *Решением системы* $Ax = b$ называется матрица x_0 размера $n \times 1$, для которой выполнено равенство $Ax_0 = b$. Матрица A называется матрицей системы. Матрица $\tilde{A} = (A),(b)$ размера $m \times n+1$ называется расширенной матрицей системы.

Задача 7. Решите следующие системы линейных уравнений:

1. $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ -7x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \end{cases}$;   2. $\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \\ 6x_1 & + & 5x_2 & = & 6 \end{cases}$.

Определение 6. Про две матрицы A и B одинакового размера говорят, что матрица B получена из матрицы A

1. *перестановкой строк k_1 и k_2*, если $b_{ij} = a_{ij}$ при $i \neq k_1, k_2$, $b_{k_1 j} = a_{k_2 j}$, $b_{k_2 j} = a_{k_1 j}$;

2. *умножением строки k на число $\lambda \neq 0$*, если $b_{ij} = a_{ij}$ при $i \neq k$, $b_{kj} = \lambda a_{kj}$;

3. *прибавлением к строке k_1 строки k_2, умноженной на число λ*, если $b_{ij} = a_{ij}$ при $i \neq k_1$, $b_{k_1 j} = a_{k_1 j} + \lambda a_{k_2 j}$.

Описанные выше преобразования называются *элементарными преобразованиями над строками матрицы*. Аналогично определяются *элементарные преобразования над столбцами матрицы*.

Задача 8. Докажите, что если от A к B можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований то и от B к A можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований

Задача 9. Докажите, что любое элементарное преобразование строк эквивалентно операции домножения слева на некоторую (какую?) матрицу, не зависящую от преобразуемой матрицы. Такие матрицы называются *элементарными матрицами*.

Задача 10. Пусть A и B — две матрицы, для которых определено AB. Докажите, что:

0. Число строк A и AB одинаковое.

1. $\big(\text{Эл}(A)\big)B = \text{Эл}(AB)$, где $\text{Эл}(\cdot)$ обозначает какое-либо элементарное преобразование строк.

Определение 7. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными если всякое решение первой системы является решением второй, и наоборот.

Задача 11. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

1. Докажите, что элементарными преобразованиями над строками матрицы её можно привести к ступенчатому виду, в котором каждая следующая строка будет начинаться с большего количества нулей, чем предыдущая.

2. Докажите, что применяя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, мы получаем систему, эквивалентную исходной.

Задача 12. Решите методом Гаусса следующие системы:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_2 + 7x_3 = 8 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

Задача 13. Докажите, что если для матрицы A размера $m \times n$ система линейных уравнений $Ax = b$ имеет решение при любой правой части b, то $m \le n$.

Задача 14. Докажите, что если для матрицы A размера $m \times n$ система линейных уравнений $Ax = b$ имеет единственное решение, то $m \ge n$.

Определение 8. *Определителем* $\det A$ *матрицы* A называется функция на множестве матриц размера $n \times n$ такая, что:

1. $\det E = 1$

2. $\det B = -\det A$, если B получена из A перестановкой двух каких-либо строк

3. $\det B = \lambda \det A$ (где $\lambda \neq 0$), если B получена из A домножением какой-либо строки на $\lambda \neq 0$

4. $\det B = \det A$, если B получена из A прибавлением к какой-либо строке другой строки, домноженного на λ.

Задача 15. Предположим, что у квадратной матрицы есть нулевая строка. Докажите, что любая матричная функция удовлетворяющая определению 8 обращается на этой матрице в ноль.

Задача 16. Предположим, что имеется две функции $\det_1$ и $\det_2$ на множестве матриц размера $n \times n$ для которых выполнены свойства 1. 2. 3. и 4. определения 8. Докажите, что $\det_1 \equiv \det_2$.

Задача 17. Докажите, что функция на множестве матриц с описанными свойствами существует.

Указание: Провести индукцию по n следующим образом. Матрицу полученную из A полученную из матрицы A вычёркиванием i-той строки и j-того столбца будем обозначать M_{ij} (точнее M_{ij}^{A}). В силу индуктивного предположения, для каждой из этих подматриц определено число $\det M_{ij}$, которое называется минором, дополнительным к элементу a_{ij}. Число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det M_{ij}$ назовем алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в матрице A. Положим

$$\det_i A = a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni}$$

Покажите, что каждая из этих функций удовлетворяет определению 8.

Задача 18. Найдите определители следующих матриц:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5 & 6\\ -3 & -2 & -1 & 0\\ 98 & 84 & 1625 & 66078\end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Задача 19. Пусть $F(A)$ — произвольная функция от $n\times n$-матриц, для которой выполнено лишь 2. 3. и 4. определения 8. Докажите, что эта функция имеет вид $F(A) = F(E)\cdot\det(A)$.

Задача 20. Докажите, что для любых двух $n\times n$ матриц A и B выполнено $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Указание. Рассмотрите матричную функцию $F(X) = \det(XB)$.

Задача 21. Докажите, что

$$\det\begin{pmatrix}a_1\\ \ldots\\ \tilde{a}_i + \tilde{\tilde{a}}_i\\ \ldots\\ a_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a_1\\ \ldots\\ \tilde{a}_i\\ \ldots\\ a_n\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}a_1\\ \ldots\\ \tilde{\tilde{a}}_i\\ \ldots\\ a_n\end{pmatrix}$$

где $a_1, \ldots, \tilde{a}_i, \tilde{\tilde{a}}_i, \ldots a_n$ — строки длины n.

Задача 22. Докажите, что $\det A^t = \det A$.

Задача 23. Докажите, что система линейных уравнений $Ax = b$ с квадратной матрицей A имеет единственное решение для любого b тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Задача 24. Формула Крамера. Покажите, что система линейных уравнений $Ax = b$ с квадратной матрицей A, $\det A \neq 0$, имеет решение вида $x_j = \det A_j/\det A$, где A_j — матрица, полученная из матрицы A заменой j-того столбца на столбец b.