Part 1. Тензоры.

1. Принятые обозначения.

Ниже мы указываем некоторые принятые в этих заметках соглашения и обозначения.

- Основное поле мы обозначаем через k и предполагаем, что $\mathsf{k} = \mathbb{R}$ или $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. Все линейные пространства предполагаем конечномерными.
- Пусть V - векторное пространство. Двойственное к V пространство мы обозначаем V^*. Напомним, что двойственное пространство - это пространство линейных функций на пространстве V. Если основное поле $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, то наряду с двойственным пространством V^* определено комплексно-сопряженное пространство, которое мы будем обозначать $\overline{V}^*$. Комплексно-сопряженное пространство состоит из полулинейных фунций на комплекном пространстве V. Напомним, что функция $f : V \to \mathbb{C}$ на комплексном пространстве V называется полулинейной, если $f(cv) = \overline{c}f(v)$ для $c \in \mathbb{C}$, $v \in V$.
- Если в выражении встечаются переменные с индексами, то мы предполагаем, что по повторяющимся индексам происходит суммирование. Например, выражение $f_{i,j}R_l^{i,k}\Gamma_j$ равно $\sum_{i,j} f_{i,j}R_l^{i,k}\Gamma_j$.

2. Тензорные произведения пространств.

Пусть $V_1, ..., V_n$ - линейные пространства. В этом параграфе мы определим тензорное произведение $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ и докажем его основные свойства. Грубое описание тензорного произведения состоит в следующем. Тензорное произведение $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ - это линейное пространство размерности $\dim(V_1) \cdot ... \cdot \dim(V_n)$. При этом имеется *универсальное полилинейное* отображение

$$\alpha : V_1 \times ... \times V_n \to V_1 \otimes ... \otimes V_n.$$

Как известно, если в линейном пространстве V выбран базис, то элементы пространства V можно интерпретировать как столбцы высоты $\dim(V)$. Для тензорного произведения мы имеем: если в пространствах $V_1, ..., V_n$ выбраны базисы, то они определяют базис в тензорном произведении $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ и элементы тензорного произведения $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ можно интерпретировать как n-мерные матрицы размера $\dim(V_1) \times ... \times \dim(V_n)$. Элементы пространства $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ называют тензорами. В частности, (при $n = 1$) всякий элемент линейного пространства можно считать тензором. На практике, конечно, тензорами называют элементы пространства $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ при $n \geq 2$. Между тензорными произведениями пространств имеются различные *канонические* изоморфизмы. Обратим внимание читателя на то, что имеется три различные конструкции тензорного произведения.

Итак, пусть $V_1, ..., V_n$ - линейные пространства.

Определение 2.1. Отображение $\varphi : V_1 \times ... \times V_n \to U$, где U - линейное пространство, называется полилинейным, если оно линейно по каждому аргументу.

Задача 2.2. *Множество полилинейных отображений из $V_1 \times ... \times V_n$ в U образует линейное пространство.*

Полилинейное отображение из $V_1 \times ... \times V_n$ в k называется полилинейной формой.

Задача 2.3. *Пусть* $f^{(i)} \in V_i^*$, *тогда*

$$V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathsf{k}, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f^{(1)}(v_1) \cdot \ldots \cdot f^{(n)}(v_n)$$

есть полилинейное отображение (полилинейная форма).

Задача 2.4. *Пусть* $f_1^{(i)}, \ldots, f_{k_i}^{(i)}$ *базис* V_i^*. *Рассмотрим полилинейное отображение*

$$F_{m_1,\ldots,m_n} : V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathsf{k}, \qquad (v_1, \ldots, v_n) \mapsto f_{m_1}^{(1)}(v_1) \cdot \ldots \cdot f_{m_n}^{(n)}(v_n).$$

Доказать, что

$$\{F_{m_1,\ldots,m_n} \mid 1 \leq m_i \leq k_i\}$$

есть базис линейного пространства полилинейных отображений из $V_1 \times \ldots \times V_n$ *в* k.

Определение 2.5. Тензорное произведение пространств $V_1, \ldots, V_n$ - это линейное пространство $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ с универсальным полилинейным отображением

$$\alpha : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

(универсальность означает, что для любого полилинейного отображения $\varphi : V_1 \times \ldots \times V_n \to U$ существует единственное линейное отображение $\varphi_\alpha : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to U$ такое, что $\varphi = \varphi_\alpha \circ \alpha$.

Определение 2.5 можно изобразить следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \ldots \times V_n \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \arrow[dl, dotted, "\varphi_\alpha"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Сплошные стрелки на этой диаграмме - это отображения, которые заданы. Пунктирная стрелка - это отображение, существование которого утверждается. При этом диаграмма должна быть коммутативной.

Предложение 2.6. *Тензорное произведение пространств существует.*

Доказательство. Наше доказательство - явная конструкция тензорного произведения. А именно, мы определим тензорное произведение пространств $V_1, \ldots, V_n$ как пространство полилинейных функций на $V_1^* \times \ldots \times V_n^*$. Полилинейное отображение α определим следующим условием:

$$(\alpha(v_1, \ldots, v_n))(v_1^*, \ldots, v_n^*) = v_1^*(v_1) \cdot \ldots \cdot v_n^*(v_n).$$

Нетрудно проверить, что условия, которым должно удовлетворять тензорное произведение, выполнены. □

Задача 2.7. *Пусть* $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *- тензорное произведение,* $\alpha : V_1 \times \ldots \times V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ *- универсальное полилинейное отображение. Тогда*

$$\langle \alpha(V_1 \times \ldots \times V_n) \rangle \ = \ V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$$

($\langle X \rangle$ обозначает линейную оболочку подмножества X линейного пространства).

Утверждение Задачи 2.7 важно для понимания тензорных произведений. Кроме того, эта Задача полезна при доказательстве единственности тензорного произведения.

Задача 2.8. *Доказать, что тензорное произведение $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ единственно. (То есть, если $(V_1 \otimes ... \otimes V_n)'$ - еще одно тензорное произведение, $\alpha' : V_1 \times ... \times V_n \to (V_1 \otimes ... \otimes V_n)'$ - соответствующее полилинейное отображение, то существует единственный изоморфизм линейных пространств $(\alpha')_\alpha : V_1 \otimes ... \otimes V_n \to (V_1 \otimes ... \otimes V_n)'$ такой, что $\alpha' = (\alpha')_\alpha \circ \alpha$).*

Задача 2.9. *Доказать, что имеют место следующие канонические изоморфизмы.*

1. $V_1 \otimes ... \otimes V_n \simeq V_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes V_{\sigma(n)}$ *для любой перестановки* $\sigma \in \mathbb{S}_n$,
2. $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \simeq V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$,
3. $\mathbf{Hom}(V_1, V_2) \simeq V_1^* \otimes V_2$,
4. $(V_1 \otimes ... \otimes V_n)^* \simeq V_1^* \otimes ... \otimes V_n^*$.

Для $v_i \in V_i,\ 1 \leq i \leq n$ положим

$$\alpha(v_1, ..., v_n) = v_1 \otimes ... \otimes v_n \in V_1 \otimes ... \otimes V_n.$$

Элемент $v_1 \otimes ... \otimes v_n$ пространства $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ называется тензорным произведением векторов $v_1, ..., v_n$. Тензор называется разложимым, если он является тензорным произведением векторов.

Задача 2.10. *Доказать, что*

$$v_1 \otimes ... \otimes v_{i-1} \otimes (\lambda v_i + \lambda' v_i') \otimes v_{i+1} \otimes ... \otimes v_n = \lambda v_1 \otimes ... \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes ... \otimes v_n + \lambda' v_1 \otimes ... \otimes v_{i-1} \otimes v_i' \otimes v_{i+1} \otimes ... \otimes v_n \tag{2.1}$$

для всех $1 \leq i \leq n$, $\lambda, \lambda' \in \mathsf{k}$, $v_j, v_j' \in V_j$.

Укажем теперь вторую конструкцию тензорного произведения. А именно: определим тензорное произведение $V_1 \otimes ... \otimes V_n$ как факторпространство

$$\langle v_1 \otimes ... \otimes v_n \mid v_i \in V_i \rangle / \sim,$$

где, по определению, $\langle v_1 \otimes ... \otimes v_n \mid v_i \in V_i \rangle$ есть бесконечномерное пространство с базисом $\{v_1 \otimes ... \otimes v_n\}_{v_i \in V_i}$, а $\sim$ есть отношение эквивалентности, порожденное соотношением (2.1). Таким образом, в этой конструкции элементы тензорного произведения - это *конечные* суммы вида

$$v_1 \otimes ... \otimes v_n \ + \ u_1 \otimes ... \otimes u_n \ + \ \dots .$$

При этом две такие суммы равны, если одну можно преобразовать в другую, используя соотношение (2.1).

Из Задачи 2.4 следует, что если $\{e_j^{(i)} \mid 1 \leq j \leq \dim(V_i)\}$ - базис пространства V_i, то

$$\{e_{i_1}^{(1)} \otimes ... \otimes e_{i_n}^{(n)} \mid 1 \leq i_j \leq \dim(V_i)\}$$

является базисом тензорного произведения $V_1 \otimes ... \otimes V_n$. Таким образом, всякий тензор $T \in V_1 \otimes ... \otimes V_n$ можно разложить по базису:

$$T = T^{i_1, ..., i_n} e_{i_1}^{(1)} \otimes ... \otimes e_{i_n}^{(n)}.$$

Множество коэффициентов $\{T^{i_1,\dots,i_n}\}_{1\le i_j\le \dim(V_j)}$ называется координатами тензора T в базисе $\{e^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes e^{(n)}_{i_n}\}$.

Задача 2.11. *Пусть $\{f^{(i)}_j \mid 1\le j\le \dim(V_i)\}$ другой базис пространства V_i, $A^{(i)}$ - матрица перехода от базиса $\{f^{(i)}_j\}$ к базису $\{e^{(i)}_j\}$, то есть $e^{(i)}_j = A^{(i)}_{k,j} f^{(i)}_k$. Доказать, что тогда координаты $\{T_f^{i_1,\dots,i_n}\}$ тензора T в базисе $\{f^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes f^{(n)}_{i_n}\}$ выражаются через его координаты $\{T_e^{i_1,\dots,i_n}\}$ в базисе $\{e^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes e^{(n)}_{i_n}\}$ следующим образом:*

$$T_f^{j_1,\dots,j_n} \;=\; A^{(1)}_{j_1,i_1}\cdot\ldots\cdot A^{(n)}_{j_n,i_n} T_e^{i_1,\dots,i_n}.$$

Теперь мы можем определить третью конструкцию тензорного произведения. А именно: определим тензорное произведение как линейное пространство с базисом $\{e^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes e^{(n)}_{i_n} \mid 1\le i_j\le \dim(V_i)\}$. (То есть через $e^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes e^{(n)}_{i_n}$ мы *обозначаем* базисные элементы). Определим полилинейное отображение α следующим условием: $\alpha(e^{(1)}_{i_1},\dots,e^{(n)}_{i_n}) \;=\; e^{(1)}_{i_1}\otimes\dots\otimes e^{(n)}_{i_n}$ Из полилинейности вытекает, что этим условием отображение α определено корректно. Нетрудно проверить, что определенное нами пространство действительно является тензорным произведением.

В физике часто работают с тензорами используя их координаты. Например, вместо развернутой записи тензора $\varepsilon_{ijk}e_i\otimes e_j\otimes e_k$ пишут просто ε_{ijk}. При этом имеется ввиду, что набор чисел ε_{ijk} есть координаты тензора в некотором базисе. Естественно, то, какой базис рассматривается, должно быть ясно из контекста.

Рассмотрим важный частный случай, когда

$$V_1=\dots=V_k=V,\qquad V_{k+1}=\dots=V_n=V^*,$$
$$V_1\otimes\dots\otimes V_n \;=\; V^{\otimes k}\otimes (V^*)^{\otimes(n-k)}$$

(для тензорного произведения l одинаковых сомножителей U мы используем стандартное обозначение $U^{\otimes l}$). Тензор $T\in\; V^{\otimes k}\otimes (V^*)^{\otimes(n-k)}$ называется k раз контравариантным и $n-k$ раз ковариантным. Пусть $e_1,\dots,e_m$ - базис пространства V, $x^1,\dots,x^m$ - двойственный базис двойственного пространства V^*, то есть $x^i(e_j)=\delta_{ij}$ - символ Кронекера. Тогда базисом пространства $V^{\otimes k}\otimes (V^*)^{\otimes(n-k)}$ является

$$\{e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_k}\otimes x^{j_1}\otimes\dots\otimes x^{j_{n-k}} \mid 1\le i_r, j_s\le m\}.$$

Координаты тензора T из $V^{\otimes k}\otimes (V^*)^{\otimes(n-k)}$ в этом базисе обозначают $T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_{n-k}}$ так что

$$T \;=\; T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_{n-k}} e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_k}\otimes x^{j_1}\otimes\dots\otimes x^{j_{n-k}}.$$

3. Симметрические и кососимметрические тензоры.

Пусть V - векторное пространство. n-ая тензорная степень пространства V - это пространство $V^{\otimes n}$. В этом параграфе мы определим n-ую внешнюю и n-ую симметрическую степень пространства V.

Для $\sigma\in\mathbb{S}_n$ определим следующие линейные преобразования:

(1) $\sigma: V^{\times n}\to V^{\times n}, \qquad (v_1,\dots,v_n)\mapsto (v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})$,
(2) $\sigma: V^{\otimes n}\to V^{\otimes n}, \qquad (v_1\otimes\dots\otimes v_n)\mapsto (v_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes v_{\sigma(n)})$

(здесь и далее мы используем стандартное обозначение: $V^{\times n} = V\times \ldots \times V$ (n прямых сомножителей)).

Задача 3.1. *Доказать, что линейное преобразование* (2) *корректно определено.*

Определение 3.2. Полилинейное отображение $\varphi : V^{\times n} \to U$, где U - линейное пространство, называется кососимметрическим если $\varphi(\sigma(v_1, \ldots, v_n)) = \mathbf{sgn}(\sigma)\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Определение 3.3. n-ая внешняя степень пространства V - это линейное пространство $\wedge^n V$ с универсальным полилинейным кососимметрическим отображением

$$\beta : V^{\times n} \to \wedge^n V.$$

Универсальность означает, что для любого полилинейного кососимметрического отображения $\varphi : V^{\times n} \to U$ существует единственное линейное отображение $\varphi_\beta : \wedge V \to U$ такое, что $\varphi = \varphi_\beta \circ \beta$:

$$\begin{tikzcd}
V^{\times n} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \wedge^n V \arrow[dl, dotted, "\varphi_\beta"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Предложение 3.4. *Пространство* $\wedge^n V$ *существует.*

Доказательство. Положим

$$\wedge^n V = \{T \in V^{\otimes n} \mid \sigma(T) = \mathbf{sgn}(\sigma)T \text{ для всех } \sigma \in \mathbb{S}_n\},$$
$$\mathbf{alt} : V^{\otimes} \to \wedge^n V, \qquad T \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \mathbf{sgn}(\sigma)\sigma(T).$$

Задача 3.5. *Доказать, что* **alt** *является проектором пространства* $V^{\otimes n}$ *на его подпространство* $\wedge^n V$*.*

Положим $\beta = \mathbf{alt} \circ \alpha$, где $\alpha : V^{\times n} \to V^{\otimes n}$ - универсальное полилинейное отображение.

Задача 3.6. *Доказать, что* β *- универсальное полилилейное кососимметрическое отображение.*

$\square$

Задача 3.7. *Доказать, что пространство* $\wedge^n V$ *единственно. (То есть, если* $(\wedge^n V)'$ *- еще одна n-я внешняя степень пространства* V*,* $\beta' : V^{\times n} \to (\wedge^n V)'$ *- соответствующее полилинейное кососимметрическое отображение, то существует единственный изоморфизм линейных пространств* $(\beta')_\beta : \wedge^n V \to (\wedge^n V)'$ *такой, что* $\beta' = (\beta')_\beta \circ \beta$*).*

Положим $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \beta(v_1, \ldots, v_n)$.

Задача 3.8. *Доказать, что*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge (\lambda v_i + \lambda' v_i') \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \ = \tag{3.1}$$
$$\lambda v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_i \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n + \lambda' v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_i' \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n,$$
$$v_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\sigma(n)} = \mathbf{sgn}(\sigma) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

для всех $1 \leq i \leq n$, $\lambda, \lambda' \in \mathsf{k}$, $v_j, v_{j'} \in V$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Укажем теперь вторую конструкцию n-ой внешней степени пространства V. А именно, определим $\wedge^n V$ как факторпространство

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mid v_i \in V \rangle / \sim,$$

где, по определению, $\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \mid v_i \in V \rangle$ есть бесконечномерное пространство с базисом $\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_n\}_{v_i \in V}$, а $\sim$ есть отношение эквивалентности порожденное соотношениями (3.1). Если $e_1, \ldots, e_k$ - базис пространства V, то $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}$, $i_1 < \ldots < i_n$ является базисом пространства $\wedge^n V$. Таким образом, всякий элемент w пространства $\wedge^n V$ можно разложить по базису:

$$w = w^{i_1, \ldots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}.$$

В частности,

$$\dim(\wedge^n V) = \binom{\dim(V)}{n}.$$

Рассмотрим пространство

$$\wedge(V) = \mathsf{k} \oplus \wedge^1(V) \oplus \ldots \oplus \wedge^k(V),$$

где $k = \dim(V)$. Определим на $\wedge(V)$ структуру *внешней алгебры* следующим образом:

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \cdot (v_{n+1} \wedge \ldots \wedge v_{n+m}) = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge v_{n+1} \wedge \ldots \wedge v_{n+m}.$$

Внешняя алгебра $\wedge(V)$ ассоциативна, но не коммутативна. На $\wedge(V)$ имеется каноническая градуировка: $\deg(w) = n$ для $w \in \wedge^n(V)$. Имеем:

$$w \wedge w' \ = \ (-1)^{\deg(w)\deg(w')} w' \wedge w$$

для однородных элементов $w, w' \in \wedge(V)$.

Определение 3.9. Полилинейное отображение $\varphi : V^{\times n} \to U$, где U - линейное пространство, называется симметрическим, если $\varphi(\sigma(v_1, \ldots, v_n)) = \varphi(v_1, \ldots, v_n)$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Определение 3.10. n-ая симметрическая степень пространства V - это линейное пространство $S^n V$ с универсальным полилинейным симметрическим отображением

$$\gamma : V^{\times n} \to S^n V.$$

Универсальность означает, что для любого полилинейного симметрического отображения $\varphi : V^{\times n} \to U$ существует единственное линейное отображение $\varphi_\gamma : S^n V \to$

U такое, что $\varphi = \varphi_\gamma \circ \gamma$:

$$\begin{tikzcd} V^{\times n} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & S^nV \arrow[dl, dotted, "\varphi_\gamma"'] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Предложение 3.11. *Пространство S^nV существует.*

Доказательство. Положим

$$S^nV = \{T \in V^{\otimes n} \mid \sigma(T) = T \text{ для всех } \sigma \in \mathbb{S}_n\},$$

$$\mathbf{sym} : V^{\otimes} \to S^nV, \qquad T \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \sigma(T).$$

Задача 3.12. *Доказать, что* **sym** *является проектором пространства $V^{\otimes n}$ на его подпространство S^nV.*

Положим $\gamma = \mathbf{sym} \circ \alpha$, где $\alpha : V^{\times n} \to V^{\otimes n}$ - универсальное полилинейное отображение.

Задача 3.13. *Доказать, что γ - универсальное полилилейное симметрическое отображение.*

$\square$

Задача 3.14. *Доказать, что пространство S^nV единственно. (То есть, если $(S^nV)'$ - еще одна n-я симметрическая степень пространства V, $\gamma' : V^{\times n} \to (S^nV)'$ - соответствующее полилинейное симметрическое отображение, то существует единственный изоморфизм линейных пространств $(\gamma')_\gamma : S^nV \to (S^nV)'$ такой, что $\gamma' = (\gamma')_\gamma \circ \gamma$).*

Положим $v_1...v_n = \gamma(v_1, ..., v_n)$.

Задача 3.15. *Доказать, что*

$$v_1...v_{i-1}(\lambda v_i + \lambda' v_i')v_{i+1}...v_n = \lambda v_1...v_{i-1}v_iv_{i+1}...v_n + \lambda' v_1...v_{i-1}v_i'v_{i+1}...v_n, \tag{3.2}$$

$$v_{\sigma(1)}...v_{\sigma(n)} = v_1...v_n$$

для всех $\lambda, \lambda' \in \mathsf{k}$, $v_i \in V$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

Укажем теперь вторую конструкцию n-ой симметрической степени пространства V. А именно, определим S^nV как факторпространство

$$\langle v_1...v_n \mid v_i \in V\rangle / \sim,$$

где, по определению, $\langle v_1...v_n \mid v_i \in V\rangle$ есть бесконечномерное пространство с базисом $\{v_1...v_n\}_{v_i \in V}$, а $\sim$ есть отношение эквивалентности, порожденное соотношениями (3.2). Если $e_1, ..., e_k$ - базис пространства V, то $e_{i_1}...e_{i_n}$, $i_1 \leq ... \leq i_n$ является базисом пространства S^nV. Таким образом, всякий элемент p пространства S^nV можно разложить по базису:

$$p = p^{i_1,...i_n} e_{i_1}...e_{i_n}.$$

В частности, получаем

$$\dim(S^nV) = \binom{\dim(V)+n-1}{n}.$$

Пространство $S^n(V^*)$ естественным образом интерпретируется как пространство однородных многочленов (то есть форм) степени n на V. А именно: элемент $f \in S^n(V^*)$ это, по определению, симметрическая полилинейная функция $f: V\times ... \times V \to \mathsf{k}$. Такая функция определяет однородный (степени n) многочлен

$$\tilde{f}: V \to \mathsf{k}, \qquad v \mapsto f(v,...,v).$$

По форме $\tilde{f}$ несложно восстановить соответствующий ей тензор f. Тензор f называется поляризацией формы $\tilde{f}$. Пусть $x_1,...,x_m$ - линейные функции на пространстве V являющиеся базисом пространства V^*, $f = f_{i_1,...,i_n} x_{i_1}\otimes ... \otimes x_{i_n}$ - разложение симметрического тензора $f \in S^nV^*$, по базису. Чтобы получить из тензора f соответствующую ему форму $\tilde{f}$ степени n от $x_1,...,x_m$, надо просто в выражении для f убрать все значки тензорного произведения $\otimes$ и рассмотреть полученное выражение как многочлен от $x_1,...,x_m$.

Рассмотрим бесконечномерное пространство

$$\mathsf{k}[V] = \mathsf{k}\oplus S^1(V^*)\oplus S^2(V^*)\oplus \dots.$$

Определим на $\mathsf{k}[V]$ структуру *симметрической алгебры* следующим образом:

$$(f_1...f_n)\cdot(f_{n+1}...f_{n+m}) = f_1...f_nf_{n+1}...f_{n+m}.$$

Симметрическую алгебру $\mathsf{k}[V]$ является алгеброй полиномов на V. Симметрическая алгебра $\mathsf{k}[V]$ ассоциативна и коммутативна. На $\mathsf{k}[V]$ имеется каноническая градуировка: $\deg(f) = n$ для $f \in S^n(V)$.

4. Операции над тензорами.

Над тензорами определены следующие линейно-алгебраические операции.

- Тензорное умножение.
- Свертка.
- Симметризация.

Тензорное умножение.

Тензорное произведение векторов $v_1,...,v_n$, $v_i \in V_i$ - это тензор $v_1\otimes ... \otimes v_n = \alpha(v_1,...,v_n)$, лежащий в $V_1\otimes ... \otimes V_n$.

Пусть $V_1,...,V_n,U_1,...,U_n$ - линейные пространства, $\varphi_i : V_i \to U_i$, $1 \le i \le n$ - линейные отображения. Определим линейное отображение

$$\varphi_1\otimes ... \otimes \varphi_n : V_1\otimes ... \otimes V_n \to U_1\otimes ... \otimes U_n$$

следующим условием:

$$(\varphi_1\otimes ... \otimes\varphi_n)(v_1\otimes ... \otimes v_n) = \varphi_1(v_1)\otimes ... \otimes \varphi_n(v_n). \tag{4.1}$$

Задача 4.1. *Условие* (4.1) *определяет отображение $\varphi_1\otimes ... \otimes\varphi_n$ корректно. (Отображение $\varphi_1\otimes ... \otimes\varphi_n$ называется тензорным произведением линейных отображений $\varphi_1,...,\varphi_n$).*

Рассмотрим случай когда $V_i = U_i$, $1 \le i \le n$. Тогда мы имеем эндоморфизм

$$\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \ : \ V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \ \to \ V_1 \otimes \ldots \times V_n.$$

Если $\varphi_i \in \mathbf{GL}(V_i)$, $1 \le i \le n$, то $\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n \in \mathbf{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathbf{GL}(V_n)$,

$$(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)^{-1} \ = \ \varphi_1^{-1} \otimes \ldots \otimes \varphi_n^{-1}.$$

Таким образом, мы имеем отображение

$$\begin{gathered}\mathbf{GL}(V_1) \times \ldots \times \mathbf{GL}(V_n) \ \to \ \mathbf{GL}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n), \\ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \ \mapsto \ \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Задача 4.2. *Доказать, что* (4.2) *является гомоморфизмом групп.*

Свертка.

Рассмотрим тензорное произведение $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$.

Задача 4.3. *Пусть* $1 \le i < j \le n$, $V_i \simeq V$, $V_j \simeq V^*$ *для некоторого линейного пространства* V. *Доказать, что тогда корректно определено линейное отображение* $\mathbf{Ct}_{i,j} : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to V_1 \otimes \ldots \otimes \hat{V}_i \otimes \ldots \otimes \hat{V}_j \otimes \ldots \otimes V_n$ *такое, что* $\mathbf{Ct}_{i,j}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_i(v_j) v_1 \otimes \ldots \otimes \hat{v}_i \otimes \ldots \otimes \hat{v}_j \otimes \ldots \otimes v_n$ *(шляпка над пространством или над элементом означает, что соответствующий тензорный множитель отсутствует). (Отображение* $\mathbf{Ct}_{i,j}$ *называется сверткой).*

Рассмотрим тензорное произведение $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes(n-k)}$. Пусть $1 \le p \le k$, $1 \le q \le n-k$. Операция свертки по p-му индексу сверху и q-му индексу снизу это линейное отображение

$$\mathbf{Ct}_{i,j} : V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes(n-k)} \to V^{\otimes(k-1)} \otimes (V^*)^{\otimes(n-k-1)},$$

$$\{T^{i_1,\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_{n-k}}\} \mapsto \{T^{i_1,\ldots,i_{p-1},l,i_{p+1},\ldots,i_k}_{j_1,\ldots,j_{q-1},l,j_{q+1},\ldots,j_{n-k}}\}.$$

Если тензор симметричен отдельно по верхним и отдельно по нижним индексам, то результат свертки не зависит от того, по каким индексам она произведена. В общем случае результат свертки зависит от индексов, по которым она произведена. Полная свертка тензора - это его последовательная свертка до тех пор, пока это возможно (если конечный результат зависит от индексов, по которым делаются свертки, то эти индексы указываются).

Симметризация.

Об операциях симметризаций тензоров мы расскажем после того как изучим представления симметрической и полной линейной групп. Пока заметим только, что примерами операторов симметризации являются рассмотренные выше операторы **alt** и **sym**.

5. Примеры тензоров.

В этом параграфе мы приведем примеры тензоров, часто встречающихся в математической и физической литературе.

Пример 5.1. *Расширение скаляров.* С помощью тензорных произведений можно расширять поле скаляров. А именно: если V - векторное пространство над полем k, $K \supset \mathsf{k}$ - расширение полей (в частности, K является векторным пространством над k), то на тензорном произведени $V \otimes K$ канонически определена структура векторного пространства над полем K. В этом случае говорят, что векторное пространство $V \otimes K$ над полем K получено из векторного пространства V над полем k расширением поля скаляров. Вместо $V \otimes K$ пишут $V \otimes_{\mathsf{k}} K$, чтобы подчеркнуть, что V и K рассматриваются как векторные пространства над k. Таким образом, $V \otimes_{\mathsf{k}} K$ является векторным пространством над k и над K. Важный частный случай: $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ - комплексификация вещественного векторного пространства V.

Пример 5.2. *Тензор инерции тела.* Пусть X - твердое тело в пространстве, O - центр масс тела X, $(O; e_1, e_2, e_3)$ - ортогональная система координат с центром в O. Таким образом, пространство можно отождествить с $\mathbb{R}^3$, причем e_1, e_2, e_3 - базис в $\mathbb{R}^3$. Пусть x_1, x_2, x_3 - соответствующие базису координатные функции. Тогда определен тензор инерции

$$I = I_{i,j} x_i \otimes x_j \in S^2 \mathbb{R}^{3*}$$

Тензор I характеризует распределение массы тела X по отношению к центру масс O и осям e_1, e_2, e_3. Допустим, на тело не действуют никакие силы. Тогда $(O; e_1, e_2, e_3)$ есть инерциальная система координат, в которой центр масс покоится, а тело вращается вокруг точки O. Пусть

$$\Omega = \Omega_i e_i \in \mathbb{R}^3$$

- угловая скорость вращения (Ω является вектором). Тогда кинетическая энергия T вращения тела равна

$$T = \frac{1}{2} I_{i,j} \Omega_i \Omega_j.$$

То есть T есть полная свертка тензора $\frac{1}{2}\Omega \otimes \Omega \otimes I$.

Part 2. **Представления групп.**

6. Определения и основные конструкции представлений.

Пусть G - группа, X - множество. Действие группы G на множестве X - это отображение

$$G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

такое, что

- $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$,
- $e \cdot x = x$

для всех $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$, где e - единичный элемент группы G. Представлять себе это надо так, что каждый элемент g группы G взаимно-однозначно отображает X на себя: $g : X \to X, \quad x \mapsto g \cdot x$ и при этом эти отображения для элементов группы G естественным образом согласованы. Таким образом, действие группы G на множестве X - это все равно, что гомоморфизм группы G в группу $\mathbf{Aut}(X)$ взаимно-однозначных отображений множества X на себя. Запись $G : X$ означает, что задано действие G на X. Подмножество $G \cdot x \subset X$ называется орбитой (G-орбитой) элемента $x \in X$, а подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ называется стабилизотором элемента x в G. Ясно, что X является дизъюнктным объединением орбит. Стабилизатор всякой точки $x \in X$ является подгруппой в G. Элемент $y \subset X$ (подмножество $Y \subset X$) называется инвариантным или G-инвариантным, если $g \cdot y = y$ для всех $g \in G$ ($g \cdot y = y$ для всех $g \in G, \quad y \in Y$). Подмножество инвариантных элементов множества X обозначают X^G. Отображение $\varphi : X \to Y$ множеств, на которых действует группа G, называется G-отображением (или G-эквивариантным отображением), если оно коммутирует с действием группы G, то есть $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$. Если на множествах X и Y имеются дополнтельные структуры (линейных пространств, гладких многообразий, проективных многообразий, ...) и G-отображение φ "уважает" эти структуры (является линейным отображением линейных пространств, бесконечно-дифференцируемым отображением гладких многообразий, регулярным отображением проективных многообразий, ...), то в этом случае φ называют G-морфизмом или G-эквивариантным морфизмом.

Пример 6.1. Для всякой группы G определены ее действия $G : G$ на себе левыми и правыми сдвигами. Действие левыми сдвигами определяется следующим образом: $g \cdot g' = gg'$. Действие правыми сдвигами определяется так: $g \cdot g' = g'g^{-1}$. Заметим, что если определить действие правыми сдвигами по формуле $g \cdot g' = g'g$, то, вообще говоря, это не будет действием, так как не будет выполнено $g_1 \cdot (g_2 \cdot g') = (g_1 g_2) \cdot g'$. Правые и левые действия группы на себе коммутируют. Таким образом, мы можем определить их "одновременное" действие: $g \cdot g' = gg'g^{-1}$. Это действие называется действием сопряжениями группы G на себе.

Определение 6.1. Представление группы G в векторном пространстве V - это такое действие группы G на V, при котором сохраняется структура векторного пространства V. То есть для всех $g \in G$ отображение $g : V \to V$ является автоморфизмом линейного пространства V.

Таким образом, представление группы G в V - это все равно, что гомоморфизм группы G в группу $\mathbf{GL}(V)$. Иногда вместо слова "представление" говорят "линейное представление" или говорят, что V является G-модулем. Два представления $G : V$, $G : W$ называются изоморфными, если существует линейный G-изоморфизм $V \to W$, то есть между линейными пространствами V и W имеется изоморфизм, согласованный с представлениями в них группы G. Представление $G : V$ называется неприводимым, если $G \cdot W \not\subset W$ для любого собственного линейного подпространства $W \subset V$. Для всякой группы имеется *тривиальное* представление, при котором все элементы $g \in G$ действуют на V тривиально. Тривиальному представлению соответствует тривиальный гомоморфизм групп $G \to \mathbf{GL}(V)$, при котором вся группа отображается в тождественное преобразование пространства V.

Пусть $G : V$ - представление, то есть мы имеем гомоморфизм групп $\rho : G \to \mathbf{GL}(V)$. Часто случается, что образ ρ в группе $\mathbf{GL}(V)$ попадает в какую-нибудь стандартную подгруппу $H \subset \mathbf{GL}(V)$, то есть $\rho(G) \subset H$. Если, например, $\rho(G) \subset \mathbf{SL}(V)$, то, чтобы подчеркнуть это обстятельство, говорят, что ρ является унимодулярным представлением (напомним, что группа $\mathbf{SL}(V)$ называется унимодулярной). Аналогично происходят и другие названия:

- Представление ρ называется *ортогональным,* если $\rho(G) \subset \mathbf{O}(V)$, где $\mathbf{O}(V)$ - ортогональная группа (то есть в пространстве V фиксирована невырожденная положительно определенная квадратичная форма и группа $\mathbf{O}(V)$ состоит из таких линейных преобразований пространства V, которые сохраняют эту форму).

- Представление ρ называется *симплектическим,* если $\rho(G) \subset \mathbf{Sp}(V)$, где $\mathbf{Sp}(V)$ - симплектическая группа (то есть в пространстве V фиксирована невырожденная внешняя 2-форма $\omega \in \wedge^2(V)$ и группа $\mathbf{Sp}(V)$ состоит из таких линейных преобразований пространства V, которые сохраняют эту форму). В этом случае пространство должно быть четномерным, так как невырожденная внешняя 2-форма существует только в четномерных пространствах.
- Представление ρ называется *перестановочным* (иногда говорят *пермутационным*), если в некотором базисе $e_1, ..., e_n$ пространства V элементы $\rho(g),\ g \in G$ действуют на V, переставляя базисные векторы. Таким образом, в этом случае $\rho(g)(e_i) = e_{\rho'(i)}$, где $\rho' : G \to \mathbb{S}_n$ - некоторый гомоморфизм групп.
- Представление ρ называется *мономиальным,* если в некотором базисе $e_1, ..., e_n$ пространства V элементы $\rho(g),\ g \in G$ действуют на V, переставляя базисные векторы и умножая их на ненулевые числа (то есть, $\rho(g)(e_i) = f(g)e_{\rho'(i)}$, где $f : G \to \mathsf{k}$ - некоторая функция на группе, $\rho' : G \to \mathbb{S}_n$ - гомоморфизм групп.

Имеются стандартные способы строить новые представления из уже имеющихся. А именно: пусть $G : V, W, ...$ - представления. Тогда из них можно "изготовить" следующие представления.

- $G : V^*$. Это представление определено условием, что каноническое билинейное отображение $V \times V^* \to \mathsf{k}$ есть G-отображение (группа G действует на k тривиально). Имеем: $(g \cdot v^*)(v) = v^*(g^{-1} \cdot v)$.
- $G : V \oplus W$. Это представление определено условием, что канонические линейные отображения $V \to V \oplus W,\ W \to V \oplus W$ есть G-отображения. Имеем: $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$.
- $G : V \times W$. Это представление определено условием, что канонические проекции $V \times W \to V, \quad V \times W \to W$ есть G-отображения. Имеем: $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$. Как известно, прямое произведение конечного числа векторных пространств канонически изоморфно прямой сумме этих векторных пространств. Таким образом, эта конструкция представлений совпадает с предыдущей.
- $G : V \otimes W$. Это представление определено условием, что каноническое билинейное отображение $V \times W \to V \otimes W$ есть G-отображения. Имеем: $g \cdot (v \otimes w) = g \cdot v \otimes g \cdot w$.
- $G : \mathbf{Hom}(V, W)$. Это представление строится согласно конструциям, описанным выше, так как $\mathbf{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$. Укажем его явно: $g \cdot \varphi = g \circ \varphi \circ g^{-1}$, то есть, $(g \cdot \varphi)(v) = g \cdot (\varphi(g^{-1} \cdot v))$.
- При действии группы G на $V^{\otimes n}$ линейные подпространства $\wedge^n V$ и $S^n V$ инвариантны (доказать). Следовательно, определены представления $G : \wedge^n V, \quad G : S^n V$.
- Если $\rho : G \to H$ - гомоморфизм групп, то всякое представление $H : V$ группы H определяет представление группы G следующим образом: $g \cdot v = \rho(g) \cdot v$.

Лемма 6.2 (Лемма Шура). *Предположим, что основное поле $\mathsf{k} = \mathbb{C}$. Пусть $G : V, \quad G : W$ - неприводимые представления, $\varphi : V \to W$ - линейное G-отображение, тогда*

- *или $\varphi = 0$, или φ - изоморфизм,*
- *если $V = W$, то $\varphi = \lambda\, \mathbf{id}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Задача 6.3. *Доказать Лемму Шура.*

7. Представления конечных групп.

Наша цель в этом параграфе - доказать утверждения, проясняющие то, как устроены конечномерные представления конечных групп. Таким образом, группы, которые мы рассматриваем в этом параграфе, предполагаются конечными, а представления - конечномерными. Важнейшее свойство конечных групп - существование оператора усреднения в пространстве всякого представления. А именно: пусть $G : V$ - линейное представление. Тогда оператор усреднения - это линейный оператор

$$\natural : V \to V, \qquad v \mapsto v^{\natural} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\cdot v.$$

Нетрудно заметить, что $\natural$ является G-эквивариантным проектором пространства V на V^G.

Предложение 7.1. *Пусть $G : V$ - представление конечной группы, $W \subset V$ - G-инвариантное линейное подпространство, тогда существует G-инвариантное линейное подпространство $W' \subset V$ такое, что $V = W \oplus W'$ ("всякое G-инвариантное подпространство обладает G-инвариантным дополнением").*

Доказательство. Пусть $p : V \to V$ - какой-нибудь проектор пространства V на подпространство W. Положим

$$p_0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\circ p\circ g^{-1} : V \to V.$$

Фактически мы рассматриваем проектор p как элемент G-модуля $\mathbf{Hom}(V, V)$ и p_0 является усреднением оператора p, то есть $p_0 = p^{\natural}$. Имеем: p_0 есть G-проектор V на W (доказать). Положим $W' = \mathbf{Ker}(p_0)$. □

Следствие 7.2. *Всякое представление конечной группы разлагается в прямую сумму неприводимых представлений. То есть, если $G : V$ - конечномерное представление конечной группы, то пространство V можно разложить в прямую сумму неприводимых G-инвариантных подпространств: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots$.*

Пример 7.1. Рассмотрим бесконечную группу k (аддитивную группу поля k). Рассмотрим представление

$$\mathsf{k} \to \mathbf{GL}(\mathsf{k}^2), \qquad a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $W = \{(t, 0) \mid t \in \mathsf{k}\}$ является собственным k-инвариантным подпространством, причем для W не существует k-инвариантного дополнения. Таким образом, условие конечности группы G в формулировке Предложения 7.1 существенно.

Говорят, что для определенного типа представлений группы G выполнен принцип полной приводимости, если всякое конечномерное представление группы G этого типа разлагается в прямую сумму неприводимых. Кроме представлений над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$ конечных групп принцип полной приводимости выполнен для непрерывных представлений *компактных* и для регулярных представлений *редуктивных* групп. Пусть для группы G выполнен принцип полной приводимости, $\{V_i\}_{i\in I}$ - множество неприводимых представлений группы G. Рассмотрим представление $G : V$ и пусть в разложении его в прямую сумму неприводимых G-модуль V_i встречается n_i раз. Тогда это записывают следующим образом: $V \simeq n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \ldots$, где n_iV_i обозначает $V_i \oplus \ldots \oplus V_i$ (n_i прямых слагаемых). Число n_i называется кратностью неприводимого G-модуля V_i в V.

Среди всех представлений конечной группы G особую роль играют левое и правое *регулярные* представления. Они определяется следующим образом. Рассмотрим $|G|$-мерное векторное пространство $\mathsf{k}G$ с базисом $\{e_g \mid g \in G\}$. Левое регулярное представление $G : \mathsf{k}G$ группы G - это представление, определенное следующим образом: $g \cdot e_{g'} = e_{gg'}$, а правое: $g \cdot e_{g'} = e_{g'g^{-1}}$. Эти представления изоморфны:

$$\mathsf{k}G \quad (\text{как правый регулярный } G\text{-модуль}) \quad \longrightarrow$$
$$\mathsf{k}G \quad (\text{как левый регулярный } G\text{-модуль}), \qquad e_g \mapsto e_{g^{-1}}.$$

В дальнейшем регулярным представлением мы будем называть правое регулярное представление.

Определение 7.3. Пусть $G : V$ - представление. Характер этого представления - это функция

$$\chi : G \to \mathsf{k}, \qquad g \mapsto \mathbf{tr}(g : V \to V).$$

Рассмотрим действие группы G на себе сопряжениями: $G : G, \quad g \cdot g' = g\ g'\ g^{-1}$. Орбиты этого действия называются классами сопряженных элементов. Группа G является дизъюнктным объединением классов сопряженных элементов. Обозначим через $\mathsf{k}_{Class}(G)$ множество функций на G со значением в k и постоянных на классах сопряженных элементов. $\mathsf{k}_{Class}(G)$ является векторным пространством размерности, равной числу классов сопряженных элементов.

Предложение 7.4. *$\chi_V \in \mathsf{k}_{Class}(G)$ для любого представления $G : V$.*

Доказательство. $\chi_V(gg'g^{-1}) = \mathbf{tr}(gg'g^{-1} \ : \ V \to V) = \mathbf{tr}(g^{-1}gg' \ : \ V \to V) = \chi_V(g')$ □

Найдем характер регулярного представления $G : \mathsf{k}G$. Это перестановочное представление. Нетрудно заметить, что $g \cdot e_{g'} \neq e_{g'}$ для любых $g, g' \in G$, $g \neq e$. Следовательно, $\chi_{\mathsf{k}G}(g) = 0$ для $g \neq e$. Имеем: $e \cdot e_{g'} = e_{g'}$ для любого $g' \in G$ и, следовательно, $\chi_{\mathsf{k}G}(e) = \dim(\mathsf{k}G) = |G|$. Таким образом,

$$\chi_{\mathsf{k}G}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } g \neq e, \\ |G|, & \text{если } g = e. \end{cases}$$

Задача 7.5. *Пусть $G : V$, W - представления. Доказать, что тогда*

1. $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$,
2. $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$,
3. $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V^2(g) - \chi_V(g^2)]$,
4. $\chi_{S^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V^2(g) + \chi_V(g^2)]$,
5. $\chi_{S^3 V}(g) = \frac{1}{6}[\chi_V^3(g) + 2\chi_V(g^3) + 3\chi_V(g)\chi_V(g^2)]$,
6. $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}, \quad \chi_{\overline{V}^*} = \chi_V$, *если* $\mathsf{k} = \mathbb{C}$,
7. $\chi_{V^*} = \chi_V$, *если* $\mathsf{k} = \mathbb{R}$.

Пусть $G : V$ - представление. Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi : (\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g) : V \to V.$$

Задача 7.6. *Доказать, что φ является проектором V на V^G. В частности,*

$$\dim(V^G) = \mathbf{tr}(\varphi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathbf{tr}(g : V \to V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g).$$

Начиная с этого места мы считаем, что основное поле $\mathsf{k} = \mathbb{C}$.

На пространстве $\mathbb{C}_{Class}(G)$ рассмотрим скалярное произведение

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\alpha(g)\overline{\beta(g)}$$

Лемма 7.7. *Характеры неприводимых представлений ортогональны, то есть*

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1, & \text{если } V \text{ изоморфно } W, \\ 0, & \text{если } V \text{ неизоморфно } W. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\mathbf{Hom}(V, W)$. Из определений несложно усмотреть, что инварианты этого подпространства (то есть, элементы $\mathbf{Hom}(V, W)^G$) состоят из линенйных G-отображений. Из леммы Шура получаем:

$$\dim(\mathbf{Hom}(V, W)^G) = \begin{cases} 1, & \text{если } V \text{ изоморфно } W, \\ 0, & \text{если } V \text{ неизоморфно } W. \end{cases}$$

С другой стороны, используя Задачу 7.6, имеем:

$$\begin{aligned}\dim(\mathbf{Hom}(V, W)^G) \; &= \; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\mathbf{Hom}(V,W)}(g) \; = \; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V^*\otimes W}(g) \; = \\ &\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) \quad = \; (\chi_W, \chi_V).\end{aligned}$$

(мы использовали канонический изоморфизм $\mathbf{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$). □

Следствие 7.8. *Число неприводимых представлений группы не превосходит числа классов сопряженных элементов. В частности, конечная группа имеет конечное число неприводимых представлений.*

Предложение 7.9. *Пусть $G : V$ - представление, $V \simeq n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \ldots$ - разложение G-модуля V в прямую сумму неприводимых модулей. Тогда*

1. $n_i = (\chi_{V_i}, \chi_V)$,
2. $(\chi_V, \chi_V) = n_1^2 + n_2^2 + \ldots$.

В частности, неизоморфные представления имеют разные характеры (это следует из (1)*) и представление $G : V$ неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V, \chi_V) = 1$ (это следует из* (2)*).*

Доказательство. (2) следует из (1) и свойств скалярного произведения. Докажем (1). Имеем:

$$(\chi_{V_i}, \chi_V) = (\chi_{V_i}, \chi_{n_1V_1 \oplus n_2V_2 \oplus \dots}) = n_1(\chi_{V_i}, \chi_{V_1}) + n_2(\chi_{V_i}, \chi_{V_2}) + \dots = n_i.$$

□

Следствие 7.10. *G-модуль $\mathbb{C}G$ следующим образом разлагается в прямую сумму неприводимых G-модулей:*

$$\mathbb{C}G = (\dim(V_1))V_1 \ \oplus \ (\dim(V_2))V_2 \ \oplus \ \dots,$$

где $V_1, V_2, \dots$ - все неприводимые G-модули. В частности,

$$|G| = (\dim(V_1))^2 + (\dim(V_2))^2 + \dots.$$

Доказательство. Действительно, кратность неприводимого G-модуля V_i в G-модуле $\mathbb{C}G$ равна

$$(\chi_{V_i}, \mathbb{C}G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_i}(g)\overline{\chi_{\mathbb{C}G}(g)} \quad = \frac{1}{|G|}\chi_{V_i}(e)|G| = \dim(V_i).$$

□

Теорема 7.11. *Число неприводимых представлений конечной группы равно числу ее классов сопряженных элементов. Таким образом, характеры неприводимых представлений группы G образуют ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}_{Class}G$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathbb{C}_{Class}(G)$. Достаточно доказать, что если $(\alpha, \chi_V) = 0$ для любого представления $G : V$, то $\alpha = 0$. Докажем это. Для всякого представления $G : V$ определим линейное отображение

$$\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G}\alpha(g)g : V \to V.$$

Лемма. *Отображение $\varphi_{\alpha,V}$ G-эквивариантно.*

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}
\text{ображение } \varphi_{\alpha,V} \ \ G\text{-эквивариантно} \quad &\Longleftrightarrow \\
g' \circ \varphi_{\alpha,V} = \varphi_{\alpha,V} \circ g' \quad \forall g' \in G \quad &\Longleftrightarrow \\
\sum_{g\in G}\alpha(g)g'g = \sum_{g\in G}\alpha(g)gg' \quad \forall g' \in G \quad &\Longleftrightarrow \\
\sum_{g\in G}\alpha(g)g'g - \sum_{g'\in G}\alpha(g'g''(g')^{-1})g'g'' \quad \forall g' \in G \quad &\Longleftrightarrow \\
\sum_{g\in G}[\alpha(g) - \alpha(g'g''(g')^{-1})]g'g = 0 \quad \forall g' \in G.&
\end{aligned}$$

Последнее соотношение верно, так как $\alpha \in \mathbb{C}_{Class}(G)$. Следовательно, отображение $\varphi_{\alpha,V}$ G-эквивариантно. □

Лемма. *Если G-модуль V неприводим, то $\varphi_{\alpha,V} = 0$.*

Proof. По предыдущей лемме отображение $\varphi_{\alpha,V}$ G-эквивариантно. Следовательно, по лемме Шура, $\varphi_{\alpha,V} = \lambda\ \mathbf{id}$. Достаточно доказать, что $\lambda = 0$. Имеем:

$$\lambda = \frac{1}{\dim(V)}\mathbf{tr}(\varphi_{\alpha,V} : V \to V) \ = \ \frac{1}{\dim(V)}\mathbf{tr}((\sum_{g\in G}\alpha(g)g) : V \to V) \ = $$
$$\frac{1}{\dim(V)}\sum_{g\in G}\alpha(g)\chi_V(g) \ = \frac{|G|}{\dim(V)}\overline{(\alpha(g), \chi_{V^*}(g))} \quad = \ 0.$$

□

Из предыдущей леммы следует, что $\varphi_{\alpha,V} = 0$ для любого G-модуля. Рассмотрим G-модуль $\mathbb{C}G$. Имеем:

$$\varphi_{\alpha,V}(e_{g'}) = \sum_{g\in G}\alpha(g)ge_{g'} = \sum_{g\in G}\alpha(g)e_{gg'} = 0$$

для всех $g' \in G$ и, следовательно, $\alpha(g) = 0$ для всех $g \in G$. Следовательно, $\alpha = 0$. □

Для анализа представлений конечной группы полезно составить *таблицу характеров*. В таблице характеров указываются значения $\{\chi_{V_i}(g_j) \mid g_j \in C_j\}$, где $V_1, V_2, \ldots$ - все неприводимые G-модули, $C_1, C_2, \ldots$ - все классы сопряженных элементов группы G.

8. Групповая алгебра конечной группы.

Пусть G - конечная группа. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}G$. На пространстве $\mathbb{C}G$ имеется структура алгебры: умножение в $\mathbb{C}G$ определяется на образующих следующим естественным образом: $e_g \cdot e_{g'} = e_{gg'}$. Алгебра $\mathbb{C}G$ называется групповой алгеброй группы G.

Всякое представление $G : V$ определяет представление $\mathbb{C}G : V$ групповой алгебры так, что $(\sum_{g\in G} a_g e_g)\cdot v = \sum_{g\in G} a_g(g\cdot v)$. Ясно, что и, наоборот, представление групповой алгебры определяет соответствующее представление группы. Таким образом, представления $G : V$ взаимно однозначно соответствуют гомоморфизмам алгебр $\mathbb{C}G \to GL(V)$.

Рассмотрим линейное пространство $\mathbf{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)^G$, элементы которого - это линейные G-отображения $\varphi : \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$. Это линейное пространство допускает каноническую структуру алгебры: если $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)^G$, то произведение φ_1 на φ_2 - это $\varphi_1 \circ \varphi_2$.

Пусть $V_1, V_2, \ldots$ - множество всех неприводимых G-модулей. Далее мы будем использовать стандартное обозначение $\mathbf{Mat}_n$ для алгебры матриц размера $n \times n$. Рассмотрим алгебру $\oplus\mathbf{Mat}_{\dim V_i}$ (прямая сумма алгебр $\mathbf{Mat}_{\dim V_1}, \mathbf{Mat}_{\dim V_2}, \ldots$).

Теорема 8.1. *Алгебры* $\mathbf{Hom}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}G)^G$ *и* $\oplus\mathbf{Mat}_{\dim V_i}$ *изоморфны.*

Доказательство. Пространство $\mathbb{C}G$ как G-модуль изоморфно $\oplus(V_i^{\oplus \dim V_i})$. Пусть U_i - тривиальный $\dim(V_i)$-мерный G-модуль. Тогда G-модуль $\oplus(V_i^{\oplus \dim V_i})$ изоморфен $V_i \otimes U_i$ и, следовательно, G-модуль $\mathbb{C}G$ изоморфен $\oplus(V_i \otimes U_i)$. Имеем изоморфизм алгебр:

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}(\mathbb{C}G,\mathbb{C}G)^G \ \simeq \ \mathbf{Hom}(\oplus(V_i\otimes U_i),\oplus(V_j\otimes U_j))^G \ \simeq \\ \oplus\mathbf{Hom}(V_i\otimes U_i,V_j\otimes U_j)^G \ \simeq \ \oplus((V_i\otimes U_i)^*\otimes(V_j\otimes U_j))^G \ \simeq \\ \oplus(V_i^*\otimes V_j)^G\otimes(U_i^*\otimes U_j) \ \simeq \ \oplus(U_i^*\otimes U_i) \ \simeq \ \oplus\mathbf{Mat}_{\dim U_i} \ = \ \oplus\mathbf{Mat}_{\dim V_i} \end{aligned}$$

так как

$$(V_i^*\otimes V_j)^G \ \simeq \ \mathbf{Hom}(V_i,V_j)^G \ \simeq \begin{cases} \mathbb{C} & \text{если } i=j, \\ 0 & \text{если } i\neq j \end{cases}$$

по лемме Шура. □

Для элемента $a\in\mathbb{C}G$ рассмотрим линейное отображение

$$r_a:\mathbb{C}G\to\mathbb{C}G, \qquad b\mapsto ba.$$

Задача 8.2. *Проверить, что* $r_a\in\mathbf{Hom}(\mathbb{C}G,\mathbb{C}G)^G$.

Имеем антигомоморфизм алгебр

$$\beta:\mathbb{C}G\to\mathbf{Hom}(\mathbb{C}G,\mathbb{C}G)^G, \qquad a\mapsto r_a$$

("-анти" означает, что $\beta(ab)=\beta(b)\beta(a)$).

Теорема 8.3. *β является антиизоморфизмом алгебр. В частности, любое линейное G-эквивариантное отображение $\mathbb{C}G\to\mathbb{C}G$ есть r_a для некоторого $a\in\mathbb{C}G$.*

Доказательство. Ясно, что ядро антигомоморфизма β тривиально. Имеем:

$$\dim(\mathbb{C}G)=|G|,$$

$$\dim(\mathbf{Hom}(\mathbb{C}G,\mathbb{C}G)^G)=\dim(\oplus\mathbf{Mat}_{\dim(V_i)})=\sum(\dim V_i)^2=|G|$$

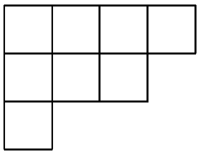
и, следовательно, β - антиизоморфизм. □

Следствие 8.4. *Алгебра $\mathbb{C}G$ изоморфна алгебре $\oplus\mathbf{Mat}_{\dim V_i}$.*

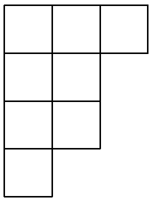
9. Представления группы $\mathbb{S}_n$.

Фиксируем натуральное число n. Наша цель в этом параграфе - описать все неприводимые представления группы $\mathbb{S}_n$ (см. Теорему 9.3 ниже).

Разбиение числа n - это разложение $n=\lambda_1+\lambda_2+...$, где $\lambda_1\geq\lambda_2\geq...\geq 0$. Разбиению можно сопоставить вектор $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...)\in\mathbb{Z}^\infty$ (часто именно этот вектор называют разбиением). Разбиения изображают диаграммами Юнга. Например, вот как выглядит диаграмма Юнга разбиения $(4,3,1)$:



Если отразить зеркально диаграмму Юнга относительно биссектрисы, то снова получится диаграмма Юнга некоторого разбиения числа n. Это разбиение обозначают $\widetilde{\lambda}$ и оно называется двойственным к λ разбиением. Например, отразив нарисованную выше диаграмму Юнга, получим диаграмму Юнга двойственного разбиения $(3,2,2,1)$:



Имеем: $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, ...)$, где $\widetilde{\lambda}_i = |\{j \mid \lambda_j \geq i\}|$. Упорядочим множество разбиений числа n следующим образом: $\lambda > \gamma$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \gamma_1$, ... , $\lambda_{i-1} = \gamma_{i-1}$, $\lambda_i > \gamma_i$ для некоторого i.

Лемма 9.1. *Число классов сопряженных элементов группы $\mathbb{S}_n$ совпадает с числом разбиений числа n.*

Доказательство. Мы укажем явно взаимно-однозначное соответствие между разбиениями числа n и классами сопряженных элементов группы $\mathbb{S}_n$. А именно: всякому разбиению $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ числа n сопоставим класс сопряженных элементов, состоящий из произведений независимых циклов длинн $\lambda_1,\ \lambda_2, ...$ $\square$

Фиксируем разбиение λ числа n и заполним произвольно клетки диаграмы Юнга числами $1, ..., n$. То, что получится, называется таблицей Юнга, соответствующей данной диаграмме Юнга. Например, нарисованную выше диаграмму Юнга разбиения $(4,3,1)$ можно заполнить следующим образом:

1	2	3	4
5	6	7	
8			

Группа $\mathbb{S}_n$ естественным образом действует на множестве таблиц Юнга, соответствующих данной диаграмме Юнга.

Фиксируем разбиение λ числа n и пусть Λ - какая-нибудь соответствующая таблица Юнга. Определим следующие подгруппы группы $\mathbb{S}_n$:

$$P_\Lambda = \{g \in \mathbb{S}_n \mid g \text{ сохраняет строки таблицы } \Lambda\},$$
$$Q_\Lambda = \{g \in \mathbb{S}_n \mid g \text{ сохраняет столбцы таблицы } \Lambda\}.$$

Очевидно, $P_\Lambda \cap Q_\Lambda = \{e\}$ и, следовательно, для всякого элемента $g \in \mathbb{S}_n$ существует не более одного разложения $g = pq$, где $p \in P_\Lambda,\ q \in Q_\Lambda$.

Задача 9.2. *$g \notin P_\Lambda Q_\Lambda$ тогда и только тогда, когда существуют j_1, j_2, которые находятся в одном столбце таблицы Λ и в одной строке таблицы $g \cdot \Lambda$.*

Положим

$$a_\Lambda = \sum_{p \in P_\Lambda} e_p, \qquad b_\Lambda = \sum_{q \in Q_\Lambda} sgn(g) e_q,$$
$$c_\Lambda = a_\Lambda b_\Lambda = \sum_{p \in P_\Lambda,\ q \in Q_\Lambda} \mathbf{sgn}(q) e_{pq}$$

(c_Λ называется симметризатором Юнга),

$$V_\Lambda \;=\; \mathbb{CS}_n \cdot c_\Lambda.$$

Рассмотрим регулярное представление $\mathbb{S}_n : \mathbb{CS}_n$. Очевидно, $\mathbb{S}_n \cdot V_\Lambda = V_\Lambda$.

Наша цель в этом параграфе - доказать следующий факт:

Теорема 9.3. (1) *V_Λ является неприводимым $\mathbb{S}_n$-модулем для всякой таблицы Юнга Λ, соответствующей разбиению числа n.*

(2) *Всякий неприводимый $\mathbb{S}_n$-модуль имеет вид V_Λ для некоторой таблицы Юнга Λ, соответствующей разбиению числа n.*

(3) *Если Λ, Γ - таблицы Юнга, соответствующие разбиениям λ, γ числа n, то $V_\Lambda \simeq V_\Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \gamma$.*

Сначала мы докажем три леммы о свойствах элементов a_Λ, b_Λ и c_Λ.

Лемма 9.4. *Для любых элементов $p \in P_\Lambda$, $q \in Q_\Lambda$ имеем:*

(1) $e_p a_\Lambda = a_\Lambda e_p = a_\Lambda$,
(2) $(\mathbf{sgn}(q) e_q) b_\Lambda = b_\Lambda (\mathbf{sgn}(q) e_q) = b_\Lambda$,
(3) $e_p c_\Lambda (\mathbf{sgn}(q) e_q) = c_\Lambda$.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) очевидны, а (3) следует из (1) и (2). □

Лемма 9.5. *Предположим $\tilde{c} \in \mathbb{CS}_n$, $\;e_p\; \tilde{c}\; \mathbf{sgn}(q) e_q = \tilde{c}$ для любых $p \in P_\Lambda$, $q \in Q_\Lambda$, тогда $\tilde{c} = t c_\Lambda$, где $t \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{c} = \sum m_g e_g$. Мы должны доказать, что для некоторого $t \in \mathbb{C}$

(1) $m_{pq} = \mathbf{sgn}(q) t$ для всех $p \in P_\Lambda$, $q \in Q_\Lambda$,
(2) $m_g = 0$, если $g \notin P_\Lambda Q_\Lambda$.

Из условия Леммы имеем для всех $p \in P_\Lambda$, $q \in Q_\Lambda$:

$$\sum_{g \in G} m_g e_g \;=\; e_p\Big(\sum_{g \in G} m_g e_g\Big)\mathbf{sgn}(q) e_q \;=$$

$$\sum_{g \in G} \mathbf{sgn}(q) m_g e_{pgq} \;=\; \sum_{g' \in G} \mathbf{sgn}(q) m_{p^{-1} g' q^{-1}} e_{g'}$$

и, следовательно,

$$m_g \;=\; \mathbf{sgn}(q) m_{p^{-1} g' q^{-1}}. \tag{9.1}$$

Подставляя в (9.1) $g = pq$, получаем $m_{pq} = \mathbf{sgn}(q) m_e = \mathbf{sgn}(q) t$, где $t = m_e$. Это дает нам (1). Для доказательства (2) возьмем j_1, j_2 из одного столбца таблицы Λ и одной строки таблицы $g \cdot \Lambda$ (см. Задачу 9.2) Пусть $q' \in \mathbb{S}_n$ - транспозиция j_1 и j_2. Тогда $q' \in Q_\Lambda$, $\mathbf{sgn}(q') = -1$, $p' = gqg^{-1} \in P_\Lambda$. Следовательно, $p' g q = g$, $m_g = (-1) m_{p' g q'} = -m_g$ (см. (9.1)) и, значит, $m_g = 0$. □

Лемма 9.6. (1) *Пусть $\lambda > \gamma$, тогда $a_\Lambda x b_\Gamma = 0$ для любого $x \in \mathbb{CS}_n$ (следствие: $\lambda > \gamma \Rightarrow c_\Lambda c_\Gamma = 0$).*

(2) *Пусть $x \in \mathbb{CS}_n$, тогда $c_\Lambda x c_\Lambda \;=\; t c_\Lambda$, где $t \in \mathbb{C}$ (следствие: $c_\Lambda c_\Lambda = n_\Lambda c_\Lambda$, где $n_\Lambda \in \mathbb{C}$).*

Доказательство. (1). Достаточно рассмотреть случай когда $x = e_g$, где $g \in \mathbb{S}_n$. Пусть Γ - таблица Юнга, соответствующая разбиению γ. Так как $\lambda > \gamma$, то существуют j_1, j_2, находящиеся в одной строке таблицы Λ и в одном столбце таблицы $g \cdot \Gamma$. Пусть $s \in \mathbb{S}_n$ - транспозиция j_1 и j_2. Имеем: $a_\Lambda e_s = a_\Lambda$, $e_s e_g b_\Lambda = -e_g b_\Lambda$ (так как $s \in P_\Lambda$, и $s \in Q_{g\cdot\Gamma}$) и, следовательно, $a_\Lambda e_g b_\Gamma = (a_\Lambda e_s)(e_s e_g b_\Gamma) = -a_\Lambda e_g b_\Gamma$ и, следовательно, $a_\Lambda e_g b_\Gamma = 0$.

(2) следует из предыдущей Леммы. □

Доказательство Теоремы 9.3. (1). Пусть $W \subset V_\Lambda$ - $\mathbb{S}_n$-подмодуль. Тогда $c_\Lambda W \subset c_\Lambda V_\Lambda \subset \mathbb{C}c_\Lambda$ (см. Лемму 9.6). Если $c_\Lambda W = \mathbb{C}c_\Lambda$, то $V_\Lambda = \mathbb{C}\mathbb{S}_n c_\Lambda = \mathbb{C}\mathbb{S}_n c_\Lambda W \subset W$ и, следовательно, $W = V_\Lambda$. Таким образом, если W - собственный $\mathbb{S}_n$-подмодуль модуля V_Λ, то $c_\Lambda W = 0$. В этом случае $W \cdot W \subset \mathbb{C}\mathbb{S}_n \cdot c_\Lambda W = 0$. Пусть $\varphi : \mathbb{C}\mathbb{S}_n \to \mathbb{C}\mathbb{S}_n$ - проектор на W. Тогда $\varphi \in \mathbf{Hom}(\mathbb{C}\mathbb{S}_n, \mathbb{C}\mathbb{S}_n)^{\mathbb{S}_n}$ и, следовательно, $\varphi = r_a : \mathbb{C}\mathbb{S}_n \to \mathbb{C}\mathbb{S}_n$, $r_a(b) = ba$ для некоторого $a \in \mathbb{C}\mathbb{S}_n$ (см. Теорему 8.3). Имеем: $a = r_a(e_e) \in W$, $W = \varphi(\mathbb{C}\mathbb{S}_n) = \varphi^2(\mathbb{C}\mathbb{S}_n) = \mathbb{C}\mathbb{S}_n \cdot a \cdot a = 0$. Таким образом, всякий подмодуль $\mathbb{S}_n$-модуля V_Λ тривиален, то есть V_Λ - неприводимый $\mathbb{S}_n$-модуль.

(2) "$\Leftarrow$". Можно считать, что $\lambda > \gamma$. Из доказательства утверждения (1) следует, что $c_\Lambda V_\Lambda = \mathbb{C}c_\Lambda$. С другой стороны, $c_\Lambda V_\Gamma = c_\Lambda \mathbb{C}\mathbb{S}_n c_\Gamma = 0$ (Лемма 9.6) и, следовательно, V_Λ не изоморфен V_Γ.

(2) "$\Rightarrow$" и (3) вытекают из Леммы 9.1 и 7.11. □

10. Представления групп $\mathbb{S}_n$, $2 \le n \le 4$.

В этом параграфе мы явно опишем представления групп $\mathbb{S}_n$, $2 \le n \le 4$ и укажем для них таблицы характеров.

Элементы $(1,2), (2,3), \dots, (n-1,n)$ порождают группу $\mathbb{S}_n$ (образующие Кокстера). Таким образом, чтобы описать представление $\mathbb{S}_n : V$, достаточно указать, как действуют в пространстве V образующие Кокстера.

У группы $\mathbb{S}_n$ есть 2 одномерных представления: тривиальное (обозначим его $\mathbf{1}$):

$$\mathbf{1} : \mathbb{S}_n \to \mathbf{GL}(1), \qquad g \mapsto 1$$

и нетривиальное:

$$\mathbf{sgn} : \mathbb{S}_n \to \mathbf{GL}(1), \qquad g \mapsto \mathbf{sgn}(g).$$

У группы $\mathbb{S}_2$ есть только 2 неприводимых представления: $\mathbf{1}$ и $\mathbf{sgn}$. Таблица характеров группы $\mathbb{S}_2$ выглядит так:

	1	**sgn**	$\lvert C_i \rvert$
e	1	1	1
(12)	1	-1	1

У группы $\mathbb{S}_3$, кроме представлений $\mathbf{1}$ и $\mathbf{sgn}$, есть еще 2-мерное неприводимое представление:

$$\alpha_2((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \alpha_2((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим:

$$\alpha_2((123)) \ = \ \alpha_2((12))\alpha_2((23)) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

и отсюда получаем таблицу характеров группы $\mathbb{S}_3$:

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{sgn}$	α_2	$\lvert C_i\rvert$
e	1	1	2	1
(12)	1	-1	0	3
(123)	1	1	-1	2

Рассмотрим группу $\mathbb{S}_4$. Кроме представлений $\mathbf{1}$ и $\mathbf{sgn}$, у этой группы есть неприводимое 2-мерное представление:

$$\beta_2((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \beta_2((34)) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это 2-мерное представление устроено следующим образом: $\beta_2 = \alpha_2 \circ \rho$, где

$$\rho : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3, \qquad (12) \mapsto (12), \quad (23) \mapsto (23), \quad (34) \mapsto (12)$$

гомоморфизм групп, ядром которого является *четверная подгруппа Клейна*

$$\mathbf{H} = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \ \subset \ \mathbb{S}_4.$$

Далее, имеется 2 неприводимых 3-мерных представления: β_3, где

$$\beta_3((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta_3((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta_3((34)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $\beta_3 \otimes \mathbf{sgn}$. Находим:

$$\beta_3((123)) = \beta_3((12))\beta_3((23)) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3((12)(34)) = \beta_3((12))\beta_3((34)) \ = \ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta_3((1234)) = \beta_3((123))\beta_3((34)) \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этих данных находим таблицу характеров группы $\mathbb{S}_4$:

	$\mathbf{1}$	$\mathbf{sgn}$	β_2	β_3	$\beta_3 \otimes \mathbf{sgn}$	$\lvert C_i\rvert$
e	1	1	2	3	3	1
(12)	1	-1	0	1	-1	6
(123)	1	1	-1	0	0	8
$(12)(34)$	1	1	2	-1	-1	3
(1234)	1	-1	0	-1	1	6