Экзамен по алгебре, I курс, I семестр

8 марта

1. Найти число решений уравнения
$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$$
в поле из 9 элементов.
2. Пусть O — группа симметрий куба, а T — группа симметрий правильного тетраэдра. Доказать, что
$$O = T \times \mathbb{Z}_2.$$
3. Существует ли такой мономорфизм φ группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ в группу
$$G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$
что
$$G/\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}?$$
4. Пусть A — конечномерная алгебра с единицей. Показать, что всякий её элемент либо является делителем нуля, либо обратим. Привести пример бесконечномерной алгебры, где это не так.
5. Пусть θ — корень уравнения
$$x^3 + x + 21 = 0.$$
Будет ли θ^{-1} целым алгебраическим числом?
6. Рассмотрим подгруппу Γ' группы $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$, состоящую из матриц вида
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \equiv d \equiv 1 \pmod 2, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod 2.$$
Доказать, что Γ' — нормальная подгруппа и вычислить её индекс (порядок факторгруппы Γ/Γ').
7. В кольце многочленов над полем $GF(2)$ рассмотрим неприводимый делитель $p(x)$ $(\deg p(x) > 0)$ многочлена
$$x^{2^n} + x + 1.$$

Доказать, что степень многочлена $p(x)$ делит $2n$, но не делит n.

8. Пусть поле K содержит первообразный корень степени n из 1, и α — корень многочлена $x^n - a$, $a \in K$. Доказать, что
   а) $L = K[\alpha]$ — нормальное расширение поля K;
   б) группа $Gal(L/K)$ — циклическая группа, и её порядок делит n.
9. Пусть
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{2002} = 0.$$
Доказать, что
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{2} = 0.$$