Кватернионы. Элементарное доказательство теоремы Фробениуса 20.09.2001

Определение. Алгебра $\mathbb{A}$ называется алгеброй с *делением*, если $\forall\, a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, $\forall\, b \in \mathbb{A}$ оба уравнения $ax = b$ и $xa = b$ разрешимы в $\mathbb{A}$.

Замечание. В определении ничего не говорится про единственность — это задача.

Обозначение. Для любой алгебры с делением $\mathbb{A}$ над полем вещественных чисел, через $Im\,(\mathbb{A})$ обозначим множество таких $x \in \mathbb{A}$, что $x^2 \leqslant 0$.

1. Пусть кватернион q действует на пространстве $Im\,(\mathbb{H})$ чисто мнимых гамильтоновых кватернионов по формуле $q\,(x) = q \cdot x \cdot q^{-1},\ (x \in Im\,(\mathbb{H}))$.

Доказать, что $q\,(x)$ — линейная функция от x, т.е. $q\,(x+y) = q\,(x) + q\,(y)$ и $q\,(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot q\,(x)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Доказать, что определитель матрицы линейного преобразования $q\,(x)$ положителен (чему он равен?), т.е. преобразование $q\,(x)$ сохраняет ориентацию в линейном пространстве $Im\,(\mathbb{H})$.

3. Доказать, что любой единичный кватернион q единственным образом представим в виде

$$q = cos\theta + sin\theta \cdot p,$$

где $|p| = 1$ и $p \in Im\,(\mathbb{H})$.

4. Доказать, что преобразование $q\,(x)$ есть вращение пространства $Im\,(\mathbb{H})$ на угол $2 \cdot \theta$ вокруг вектора p, если $q = cos\theta + sin\theta \cdot p$.

(Указание: доказать, что любой чисто мнимый единичный кватернион p можно перевести в кватернион i с помощью подходящего преобразования $q\,(x)$. А тогда наше утверждение достаточно проверить для кватерниона $cos\theta + sin\theta \cdot i$ (почему?)).

Теорема Фробениуса в задачах.

Теорема Фробениуса. *Поле $\mathbb{R}$, поле $\mathbb{C}$ и Гамильтоновы кватернионы $\mathbb{H}$ — суть единственные (с точностью до изоморфизма) ассоциативные алгебры с делением над полем вещественных чисел.*

Пусть $\mathbb{A}$ — ассоциативная алгебра с делением над $\mathbb{R}$ (не обязательно коммутативная).

5. Докажите, что в алгебре $\mathbb{A}$ есть единица 1.

6. Если элемент $a \in \mathbb{A}$ не пропорционален 1, то элементы вида $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot a$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, образуют двумерную подалгебру $C\,(a)$, изоморфную алгебре комплексных чисел.

7. Если элементы $a_1 \in \mathbb{A}$ и $a_2 \in \mathbb{A}$ не принадлежат одной подалгебре $C\,(a)$, то совокупность элементов вида $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot a_1 + \gamma \cdot a_2 + \delta \cdot a_1 \cdot a_2$ образует подалгебру $\mathrm{H}\,(a_1, a_2)$, изоморфную алгебре гамильтоновых кватернионов (полезно предварительно доказать, что если $b_1^2 = -1$ и $b_2^2 = -1$, то $b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_1 = \lambda \cdot 1$, где $\lambda \in \mathbb{R}$).

Исходя из задач 5, 6, 7, уже нетрудно доказать теорему Фробениуса.

Из задачи 5 следует, что алгебра $\mathbb{A}$ содержит поле $\mathbb{R}$ в виде одномерной подалгебры $R \cdot 1$. Если это все, то тем лучше. Если нет, то, согласно задаче 6, $\mathbb{A}$ содержит двумерную подалгебру $C\,(a)$, изоморфную полю $\mathbb{C}$. Если $\mathbb{A} = C\,(a)$, то все доказано, а если $\mathbb{A} \neq C\,(a)$, то, согласно задаче 7, алгебра $\mathbb{A}$ содержит подалгебру кватернионов $\mathrm{H}\,(a_1, a_2)$ для подходящих a_1 и a_2**.**

Выберем в $\mathrm{H}\,(a_1, a_2)$ базис $1, i, j, k$ со "стандартной" таблицей умножения. Снова, если $\mathbb{A} = \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$ то все здорово, а если нет, то надо решить следующие задачи.

8. Пусть $m \not\subset \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$, но $m \in \mathbb{A}$. Представим элемент m в виде $m = p \cdot 1 + q \cdot e$, где $e^2 = -1$ (e — мнимая единица в $C\,(m)$).

Докажите, что $i \cdot e \in \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$, а значит и $i \cdot m \in \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$

(Указание: $i \cdot e = (j \cdot k) \cdot e = j \cdot (-e \cdot k + \gamma \cdot 1) = -(j \cdot e) \cdot k + \gamma \cdot j = -(-e \cdot j + \gamma' \cdot 1) \cdot k + \gamma \cdot j = e \cdot i - \gamma' \cdot k + \gamma \cdot j \qquad (\gamma, \gamma' \in \mathbb{R})$)

9. Если для любого $m \in \mathbb{A},\ \ i \cdot m \in \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$, то $\mathbb{A} = \mathrm{H}\,(a_1, a_2)$.