Занятие 4. 27.09.01

Координаты. Ортогональность.

Задача 1. Пусть в линейном конечномерном пространстве заданы два базиса $(e_1, \dots, e_p)$ и $(f_1, \dots, f_q)$. Докажите, что $p = q$.

Определение 1. Матрица линейного отображения. Пусть $F : L \to M$ — линейное отображение векторных пространств. *Матрицей* этого *отображения в базисах* $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_m)$ называется таблица из чисел a_{ij} — коэффициентов разложения

$$F(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \dots + a_{mj}f_m.$$

Элемент a_{ij} лежит в строке номер i и столбце номер j.

Задача 2. Пусть $F_1 : L \to M$ и $F_2 : M \to N$ — линейные отображения, и $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_m)$, $(h_1, \dots, h_p)$ — базисы в линейных пространствах L, M, N соответственно. Пусть A, B, C — матрицы линейных отображений F_1, F_2 и $F_2 \circ F_1$ соответственно в базисах $(e_1, \dots, e_n)$, $(f_1, \dots, f_m)$; $(f_1, \dots, f_m)$, $(h_1, \dots, h_p)$; $(e_1, \dots, e_n)$ $(h_1, \dots, h_p)$. Докажите, что $C = BA$.

Задача 3. Пусть L — конечномерное линейное пространство и $F : L \to L$ — линейный оператор в L. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1. Оператор F взаимно-однозначно отображает L на себя.
2. Оператор F сюръективен. т.е. образ F равен L.
3. Оператор F инъективен. т.е. если $x_1 \neq x_2$ то $F(x_1) \neq F(x_2)$.
4. $\ker F = \{0\}$.
5. F переводит какой-то базис в базис.
6. F переводит любой базис снова в базис.
7. Существует пара базисов, в которой матрица F невырождена.
8. Для любой пары базисов матрица F невырождена.

Определение 2. Матрица перехода от одного базиса к другому. Пусть в линейном пространстве заданы два базиса $b(e_1, \dots, e_n)$ и $b'(e'_1, \dots, e'_n)$. *Матрицей перехода от базиса b к базису b'* называется матрица $C(b, b')$ размера $n \times n$, составленная из коэффициентов разложения $e'_j = c_{ij}e_1 + \dots + c_{nj}e_n$. Элемент c_{ij} лежит в строке номер i и столбце номер j.

Задача 4. Докажите, что $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C(b, b')$;

Докажите, что координаты вектора x в новом и старом базисах связаны соотношением

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix} = C(b, b') \begin{Vmatrix} x'_1 \\ \dots \\ x'_n \end{Vmatrix}.$$

Задача 5. Пусть линейное отображение $F : L \to L$ взаимно однозначно и $(e_1, \dots, e_n)$ — базис в пространстве L. Докажите, что матрица этого линейного отображения в базисах $(e_1, \dots, e_n)$, $(e_1, \dots, e_n)$ является одновременно матрицей перехода от базиса $(e_1, \dots, e_n)$ к базису $(Fe_1, \dots, Fe_n)$. Напишите матрицу этого линейного преобразования в базисах $(e_1, \dots, e_n)$, $(Fe_1, \dots, Fe_n)$.

Задача 6. Пусть векторы $e_1, \dots, e_n$ и x заданы своими координатами:

а) $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$, $x = (6, 9, 14)$.

б) $e_1 = (1, 2, -1, -2)$, $e_2 = (2, 3, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1, 4)$, $e_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$.

Докажите, что $(e_1, \dots, e_n)$ — базис в $\mathbb{R}^n$ и найдите координаты вектора x в этом базисе.

Задача 7. Докажите, что каждая из двух заданных систем векторов является базисом и найдите связь между координатами одного и того же вектора в этих базисах:

а) $S = \big((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 8, 2)\big)$, $S' = \big((3, 5, 8), (5, 14, 13), (1, 9, 2)\big)$.

б) $S = \big((1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 1), (1, 3, 2, 3)\big)$,
$S' = \big((1, 0, 3, 3), (-2, -3, -5, -4), (2, 2, 5, 4), (-2, -3, -4, -4)\big)$.

Задача 8. Пусть в линейном пространстве L заданы базисы $E(e_1, \dots, e_n)$, $F(f_1, \dots, f_n)$ и $H(h_1, \dots, h_n)$. Докажите, что $C(E, F)C(F, H) = C(E, H)$.

Задача 9. Пусть линейное отображение $F : V \to W$ в базисах (e_1, e_2, e_3) пространства V и (f_1, f_2) пространства W имеет матрицу $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{Vmatrix}$. Найдите матрицу отображения F в базисах $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ и $(f_1, f_1 + f_2)$.

Задача 10. Докажите, что в пространстве функций одного вещественного переменного векторы $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа $a_1, \dots, a_n$ такие, что $\det \|f_i(a_j)\| \neq 0$.

Задача 11. Выясните, какие из следующих совокупностей матриц размера $n \times n$ над полем K образуют векторные пространства относительно сложения матриц и умножения матриц на элементы поля K, найдите их базисы и размерности:

1. Все матрицы.
2. Симметрические матрицы.
3. Кососимметрические матрицы.
4. Невырожденные матрицы.
5. Вырожденные матрицы.
6. Матрицы со следом ноль.
7. Нулевая матрица.
8. Единичная матрица.
9. Матрицы, перестановочные со всеми матрицами.

Задача 12. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ — пространство бесконечных последовательностей вещественных чисел. Выяснить, что из следующего составляет в $\mathbb{R}^\infty$ подпространство:

1. Последовательности, в которых лишь конечное число элементов отлично от нуля.
2. Последовательности, в которых лишь конечное число элементов равно нулю.
3. Ограниченные последовательности.
4. Последовательности, в которых все элементы отличны от 1.
5. Последовательности, удовлетворяющие условию Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1, n_2 > N$ выполнено $|x_{n_1} - x_{n_2}| < \varepsilon$.
6. Последовательности, удовлетворяющие условию Гильберта: ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2$ сходится.

Задача 13. Пусть L_1 и L_2 — подпространства конечномерного векторного пространства V. При каких условиях следующее множество является подпространством:

1. $L_1 \cap L_2$; 2. $L_1 \cup L_2$; 3. $L_1 + L_2$?

Задача 14. Пусть L_1 и L_2 — подпространства конечномерного векторного пространства V. Докажите, что:

1. Если $L_1 \subseteq L_2$, то $\dim L_1 \leqslant \dim L_2$, причем равенство имеет место только при $L_1 = L_2$.
2. Если $\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$, то сумма $L_1 + L_2$ равна одному из этих пространств, а пересечение — другому.

Задача 15. Пусть F — линейный оператор в пространстве V, L — подпространство в V. Докажите, что:

1. Образ $A(L)$ и полный прообраз $A^{-1}(L)$ являются подпространствами в V.
2. Если V — конечномерно и оператор A невырожден, то $\dim A(L) = \dim A^{-1}(L) = \dim L$.

Задача 16. Пусть $F : L_1 \to L_2$ — линейное отображение линейных пространств. Докажите, что $\ker F$ и $\operatorname{Im} F$ являются подпространствами в L_1 и L_2 соответственно. Докажите, что $\dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F = \dim L_1$.

Определение 3. Подпространство $L' \subseteq L$ называется *инвариантным относительно оператора* $A : L \to L$, если $Ax \in L'$ для каждого $x \in L'$. ($A(L') \subseteq L'$).

Задача 17. Если $L = L' \oplus L''$ и подпространства L' и L'' инвариантны относительно оператора A, то $A(L) = A(L') \oplus A(L'')$.

Определение 4. *Скалярное произведение* в вещественном линейном пространстве L — это отображение $L \times L \to \mathbb{R}$ такое, что выполнены свойства:

1. Коммутативность: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. Дистрибутивность: $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
3. Однородность: $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
4. Положительная определённость: $\langle x, x \rangle \geqslant 0$.
5. Невырожденность: если $\langle x, x \rangle = 0$, то $x = 0$.

Определение 5. Пространство со скалярным произведением называется *Евклидовым.*

Задача 18. Докажите, что стандартное скалярное произведение $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ в $\mathbb{R}^n$ является скалярным произведением.

Задача 19. Пусть в Евклидовом пространстве имеется система попарно ортогональных векторов $a_1, \ldots, a_k$, то есть $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ при $i \neq j$. Докажите, что если ни один из этих векторов не нулевой, то они линейно независимы.

Задача 20. Пусть $S \subset V$ — некоторое подмножество. Покажите, что множество $L^\perp = \{v | v \in V, \forall\, x \in S \ \ \langle v, x \rangle = 0\}$ является линейным подпространством в V. Оно называется *ортогональным дополнением к* S.

Задача 21. Докажите, что $(S^\perp)^\perp = \langle S \rangle$, где $\langle S \rangle$ — линейная оболочка множества S.

Задача 22. Пусть L — подпространство конечномерного Евклидова пространства V. Докажите, что $V = L \oplus L^\perp$ и $L = (L^\perp)^\perp$.