Группа вычетов $\mathrm{mod}\, n$ и китайская теорема об остатках 4 октября 2001

0. Доказать, что $\mathbb{Z}_n = \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{a_i}}$, если $n = \Pi p_i^{a_i}$.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ и мультипликативная группа $\mathbb{Z}_n^*$ кольца вычетов $\mathrm{mod}\, n$

1. Доказать, что $|\mathbb{Z}_n|^* = \varphi(n)$.
2. Если $n = \Pi p_i^{a_i}$, то $\mathbb{Z}_n^* = \Pi Z_{p^{a_i}}^*$ (воспользоваться китайской теоремой об остатках)
3. Если простое p нечетно, то $\mathbb{Z}_{p^a}^*$ — циклическая группа. Является ли циклической группа $\mathbb{Z}_8^*$? Разложите группу $\mathbb{Z}_8^*$ в прямое произведение циклических групп.

Первоначальные понятия теории групп

4а. Любая подгруппа и факторгруппа циклической группы – циклическая группа.
4б. Пусть порядок элемента группы x есть число pq, где p и q взаимно просты. Доказать, что в группе найдутся такие элементы u и v, для которых выполняются равенства:

$$x = uv = vu,\ u^p = e,\ v^q = e.$$

Опр. Подстановку вида

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{k-1} & \alpha_k & \beta_1 & \dots & \beta_{n-k} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_k & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-k} \end{pmatrix}$$

будем называть *k-членным циклом* или циклом длины k и записывать так: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Опр. Два цикла $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $(\beta_1, \dots, \beta_l)$ будем называть *независимыми*, если множества $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $\{\beta_1, \dots, \beta_l\}$ не пересекаются.
5. Доказать, что каждую подстановку можно представить в виде произведения независимых циклов.
6. Пусть подстановка u представлена в виде произведения циклов, v — произвольная подстановка. Доказать, что если в циклах, составляющих u, произвести замену всех чисел так, как указывает подстановка v, то получится подстановка vuv^{-1}.
7. Найти все элементы группы S_n, перестановочные с циклом $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$.
8. Описать группу самосовмещений правильного тетраэдра и доказать, что эта группа изоморфна симметрической группе четвертой степени.
9. Найти порядок группы всех самосовмещений куба.
10. Пусть фигура Φ состоит из всех точек пространства, имеющих целые координаты в некоторой прямоугольной системе координат.

1) Найти группу самосовмещений Φ.
2) Описать все подгруппы четвертого порядка группы самосовмещений Φ.

11. Доказать, что всякая абелева группа порядка pq, где p и q — различные простые числа, циклическая.
12. Доказать, что симметрическая группа S_3 является гомоморфным образом симметрической группы S_4.
13. Если $\mathrm{ord}\, x = n$, $\mathrm{ord}\, y = m$, и $xy = yx$, то в группе есть элемент порядка НОК (m, n).
14. Пусть G абелева группа с генетическим кодом $\langle g_1, g_2, g_3 | 2g_1 + 2g_2 + 3g_3 = 0,\ 3g_1 - 6g_2 = 0\rangle$. Представить G в виде прямой суммы циклических групп. Вычислить ранг группы G.

Элементарные преобразования над полем и кольцом $\mathbb{Z}$

15. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$. Показать, что с помощью конечной цепочки элементарных преобразований можно от данного базиса V перейти к любому другому.
16. Пусть G — свободная абелева группа ранга n с базисом $g = \{g_1, \dots, g_n\}$. Показать, что с помощью цепочки элементарных преобразований над $\mathbb{Z}$

а) $g_i \leftrightarrow g_j,\ i < j$
б) $g_i \mapsto g_i + mg_j,\ m \in \mathbb{Z},\ i \neq j$
в) $g_i \mapsto -g_i$

можно от базиса g перейти к любому наперед заданному базису группы G (короче: любую целочисленную матрицу с определителем ± 1 с помощью элементарных преобразований над $\mathbb{Z}$ можно привести к единичной).
17. Докажите, что любую целочисленную матрицу с помощью элементарных преобразований (над $\mathbb{Z}$) строк и столбцов можно привести к диагональному виду $diag\,(d_{11} \dots d_{rr}, 0 \dots 0)$. При этом можно добиться того, чтобы $d_{11}|\, d_{22}|\, d_{33}| \dots | d_{rr}$.