Алгебраические числа. 11 октября

Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называют *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$, где $a_1, \dots, a_m$ — рациональные числа. Число $\alpha \in \mathbb{C}$ называют *целым алгебраическим*, если оно является корнем многочлена $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$, где $a_1, \dots, a_m$ — целые числа.

1. Назовём *содержанием* многочлена с целыми коэффициентами наибольший общий делитель его коэффициентов. Докажите, что содержание произведения двух многочленов равно произведению их содержаний. (*Лемма Гаусса*)

2. Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда он неприводим над $\mathbb{Q}$.

3. Докажите, что рациональное число является целым алгебраическим тогда и только тогда, когда оно целое.

4. Докажите, что любое целое алгебраическое число является корнем неприводимого многочлена $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$, где $a_1, \dots, a_m$ — целые числа.

5. Докажите, что для любого алгебраического числа α однозначно определён многочлен $x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$ (где $a_1, \dots, a_m$ — рациональные числа) минимальной степени m, корнем которого является α.

Корни многочлена из задачи 5 называют числами, *сопряжёнными* с α.

6. Докажите, что алгебраические числа образуют поле.

7. Докажите, что целые алгебраические числа образуют кольцо.

8. Докажите, что если α — алгебраическое число, то для некоторого натурального n число $n\alpha$ целое алгебраическое.

Квадратичные поля

Пусть $d = \pm p_1p_2\dots p_k$, где $p_1, \dots, p_k$ — попарно различные простые числа.

9. Докажите, что числа вида $a + b\sqrt{d}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, образуют поле.

Поле из задачи 9 называют *квадратичным*; его обозначают $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Если $d > 0$, то это поле называют *вещественным*, а если $d < 0$, то *мнимым*.

10. Пусть $d \equiv 2$ или $3 \pmod 4$. Докажите, что число из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ является целым алгебраическим тогда и только тогда, когда оно имеет вид $a + b\sqrt{d}$, где a и b — целые числа.

11. Пусть $d \equiv 1 \pmod 4$. Докажите, что число из поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ является целым алгебраическим тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\frac{a+b\sqrt{d}}{2}$, где a и b — целые числа одной чётности.

12. Докажите, что целые алгебраические числа поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ образуют кольцо.

Пусть D — кольцо из задачи 12. Элемент кольца D называют *единицей*, если он обратим в D.

13. Докажите, что для любого квадратичного поля единицы образуют группу по умножению.

14. Докажите, что для вещественного квадратичного поля группа единиц бесконечна.

15. Докажите, что для мнимого квадратичного поля группа единиц конечна.