Кольца и поля. 25 октября

1. Пусть R — кольцо без делителей нуля, которое обладает следующим свойством: если $p \in R$ — простой (неразложимый) элемент и p делит ab, то p делит a или b. Докажите, что в кольце R разложение на простые множители (если оно существует) единственно.

2. Докажите, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля является полем.

3. а) Докажите, что идеал (5) в кольце $\mathbb{Z}[i]$ не прост.
б) Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Докажите, что идеал (p) в кольце $\mathbb{Z}[i]$ прост.

4. Докажите, что в кольце главных идеалов (без делителей нуля) любой простой собственный идеал максимален.

5. Пусть K — поле. Докажите, что при $n \geqslant 2$ кольцо $K[x_1, \ldots, x_n]$ не является кольцом главных идеалов.

6. Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[x]$ не является кольцом главных идеалов.

7. Пусть A — факториальное кольцо, K — его поле частных, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ с коэффициентами из A, p простой элемент в кольце A. Докажите, что если a_n не делится на p, a_i делится на p для всех $i < n$ и a_0 не делится на p^2, то многочлен f неприводим над полем K (*признак Эйзенштейна*).

8. Докажите, что если p — простое число, то многочлен $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

9. а) Докажите, что многочлен $x^p - x - 1$ неприводим над полем $\mathbb{F}_p$.
б) Докажите, что многочлен $x^p - x - a$, где $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, неприводим над полем $\mathbb{F}_p$.

10. (*Китайская теорема об остатках*) Пусть A — коммутативное кольцо, $I_1, \ldots\ I_n$ — идеалы в A, причём $I_i + I_j = A$ при $i \neq j$.
а) Докажите, что для любых элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольца A существует элемент $x \in A$, для которого $x - x_i \in I_i$.
б) Докажите, что $A/\bigcap I_i \cong \prod A/I_i$.

Автоморфизмом поля K называют изоморфизм $f : K \to K$.

11. Докажите, что любой автоморфизм поля $\mathbb{Q}$ является тождественным отображением.

12. Докажите, что любой автоморфизм поля $\mathbb{R}$ является тождественным отображением. (Воспользуйтесь тем, что если $x \in \mathbb{R}$, то $x \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $x = t^2$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$.)

13. Найдите все автоморфизмы полей $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

14. Приведите пример нетождественного автоморфизма поля $\mathbb{C}$.

15. Опишите все автоморфизмы поля $\mathbb{C}$, тождественные на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

16. а) Пусть α и β — корни одного и того же неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена. Докажите, что существует автоморфизм поля $\mathbb{C}$, переводящий α в β.
б) Пусть α и β — трансцендентные числа. Докажите, что существует автоморфизм поля $\mathbb{C}$, переводящий α в β.